



A Aufgaben

Alle Lösungen finden Sie im Anhang (→ QR-Code)

Gasgesetze

- 1 Luftmasse im Klassenzimmer
 - 1.1 Schätzen Sie die Masse im Kopf ab.
 - 1.2 Schätzen Sie die Masse mithilfe der Dichte ab.
 - 1.3 Schätzen Sie aus 1.2 die spez. Gaskonstante R_i .
 - 1.4 Welches sind Fehlerquellen?
- 2 Eine Sauerstoffflasche enthält ein Volumen von 50 l bei 100 bar und steht bei 20°C im Lager.
 - 2.1 Welche Masse Sauerstoff enthält die Flasche?
 - 2.2 Welche Dichte hat der Sauerstoff in der Flasche?
 - 2.3 Die Sauerstoffflasche erwärmt sich in der Sonne auf 50°C. Skizzieren Sie das p-V-Diagramm.
 - 2.4 Wie hoch wird der Druck in der Flasche?
 - 2.5 Nachts kühlt die Flasche auf -5°C ab. Auf welchen Wert sinkt der Druck in der Flasche?
 - 2.6 Mit dem Sauerstoff wird mit 2,5 bar bei 20°C geschweißt. Welches Volumen steht dem Schweißer zur Verfügung?
- 3 Ein Pneumatikzylinder mit einem Volumen von 10 l hält bei 3 bar und 20°C eine gleich bleibende Last
 - 3.1 Durch Sonneneinstrahlung erwärmt sich der Zylinder, und die Last hebt sich mit dem Gasvolumen um 10% in die Höhe. Skizzieren Sie das p-V-Diagramm.
 - 3.2 Welche Temperatur bekommt die Luft im Zylinder?
 - 3.3 Wie groß ist das Volumen im Zylinder, wenn die Luft auf 0°C abkühlt?
- 4 Das Volumen einer Fahrradluftpumpe liegt zwischen 100 cm³ und 5 cm³. Die Pumpe wird mit Luft (20°C, Atmosphärendruck) gefüllt.
 - 4.1 Welcher Druck kann maximal entstehen, wenn man so langsam pumpt, dass ein vollständiger Ausgleich der Temperatur stattfindet?
 - 4.2 Welcher Druck kann maximal entstehen, wenn man so schnell pumpt, dass keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird?
 - 4.3 Welche Temperaturen kann die Luft in der Pumpe bei 4.1 und 4.2 erreichen?
 - 4.4 Skizzieren Sie für 4.1 und 4.2 das p-V-Diagramm.
 - 4.5 Welche mech. Arbeiten ist für 4.1 und 4.2 nötig?
 - 4.6 Warum hat schnelles Pumpen praktische Vorteile?

Prozesse mit idealen Gasen

5 Viertakt-Otto-Motor

Ein 4-Takt-Ottomotor hat die folgenden Daten:

Gesamthubraum	$V_H =$	2,0 l
Zylinderzahl	$z =$	5
Verdichtungsverhältnis	$\varepsilon =$	10 : 1
Ansaugdruck	$p_1 =$	0,8 bar
Ansaugtemperatur	$T_1 =$	80 °C
Verbrennungstemperatur:	$T_3 =$	2500 °C

Hinweise: Der Prozess wird vereinfacht, der Gaswechsel wird vernachlässigt:

- adiabate Verdichtung
 - isochore Verbrennung
 - adiabate Entspannung
 - isochore Wärmeabfuhr
 - Das Gas im Zylinder verhält sich wie reine Luft.
 - Das Verdichtungsverhältnis ist das Verhältnis aus maximalen ($V_H + V_c$) zu minimalem (V_c) Brennraum. Der Hubraum (V_H) ist die Differenz aus beiden.
- 5.1 Skizzieren Sie das p,V-Diagramm des Prozesses.
 - 5.2 Nummerieren Sie die Eckpunkte des Diagramms, mit der Nummer 1 zu Beginn der Verdichtung.

- 5.3 Ermitteln Sie die neu angesaugte Luftmasse m_0 je Zylinder und Ansaugvorgang.
- 5.4 Wie groß ist die Masse m_1 aller Gase im Brennraum (= m_0 plus Restgase vom vorherigen Takt mit denselben Zustandsgrößen wie die Frischgase.)
- 5.5 Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar.
- 5.6 Berechnen Sie die Zustandsgrößen V_2 , p_2 und T_2 nach der Verdichtung.
- 5.7 Berechnen Sie die Zustandsgrößen V_3 , p_3 und T_3 nach der Verbrennung.
- 5.8 Berechnen Sie die Zustandsgrößen V_4 , p_4 und T_4 nach der adiabaten Entspannung.

Wärmebilanz

- 5.9 Berechnen Sie die Wärmeenergie Q_{23} , die dem Gas bei einer Verbrennung zugeführt wird.¹
- 5.10 Welche Wärmemenge Q_{41} wird mit dem Gaswechsel abgeführt?²
- 5.11 Berechnen Sie die Wärmebilanz.
- 5.12 Markieren Sie Wärmezu- und abfuhr im p,V-Diagramm.

Mechanische Arbeit

- 5.13 Berechnen Sie die Kompressionsarbeit W_{12} , die Expansionsarbeit W_{34} und die Nutzenergie W_{Nutz} je Arbeitstakt.
- 5.14 Markieren Sie die Arbeiten im p,V-Diagramm.
- 5.15 Vergleichen Sie die Wärmebilanz mit der Nutzarbeit.

Sonstiges

- 5.16 Wie viel Normal-Benzin muss verbrannt werden, um Q_{23} zu erzeugen? (Heizwert $H_u = 43 \text{ MJ/kg} \rightarrow \text{TabB}$)
- 5.17 Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch je Stunde, wenn der Motor mit 3000 min^{-1} dreht und nur bei jeder 2. Umdrehung einen Arbeitstakt³ vollzieht?
- 5.18 Welche Leistung gibt der Motor ab, wenn der Kreisprozess bei 3000 min^{-1} stattfindet?
- 5.19 Wie groß ist der Wirkungsgrad in diesem theoretischen Modell?
- 5.20 Wie hoch kann der Wirkungsgrad maximal werden

$$\text{mit } \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\text{max}}}{T_{\text{min}}} \quad ?^4$$

6 Viertakt-Diesel-Motor

Berechnen Sie den Kreisprozess für einen Dieselmotor, der gegenüber dem obigen Ottomotor die folgenden Abweichungen hat:

- Verdichtung $\varepsilon = 20:1$
- Die Verbrennung erfolgt isobar
- T_3 kann nicht übernommen werden. Ermitteln Sie es mit der folgenden Angabe zum Dieseldieselkraftstoff
 - Einspritzvolumen $V_{Kr} = 12,8 \text{ mm}^3$
 - Heizwert $H_u = 42,5 \text{ MJ/kg} \rightarrow \text{TabB}$
 - Dichte $\rho = 0,83 \text{ kg/dm}^3$

¹ Beim Ottoprozess besteht das Frischgas aus Kraftstoff-Luft-Gemisch und wird durch eine Zündkerze gezündet (Fremdzündung). Die Verbrennung erfolgt dann sehr schnell, während sich der Kolben um den oberen Totpunkt herum kaum bewegt (→ Gleichraumverbrennung = isochor). Wenn die Verdichtung eines Otto-Motors zu hoch ist, kann sich das Kraftstoff-Luft-Gemisch vorzeitig selbst entzünden (Klopfen) und zu Leistungsverlust und Motorschäden führen. Super-Benzin ist klopfester und kann etwas höher verdichtet werden.

Beim Dieselmotor besteht das Frischgas aus reiner Luft, die nicht vorzeitig zündet und höher verdichtet werden kann (→ höherer Wirkungsgrad). Kraftstoff wird erst eingespritzt, wenn die Verbrennung beginnen soll. Idealerweise wird der Kraftstoff allmählich eingespritzt, damit der Verbrennungsdruck konstant bleibt (→ Gleichdruckverbrennung bzw. isobar). Weil die Gemischbildung zwischen Einspritz- und Verbrennungsbeginn Zeit erfordert, kann ein Diesel nicht so schnell drehen wie ein Benzinmotor, bei dem die Gemischbildung schon im Ansaugtakt beginnt.

² Bei Verbrennungsmotoren (Otto, Diesel ...) wird die Wärme durch Gaswechsel abgeführt. Bevor beim Arbeitstakt der Kolben seinen unteren Totpunkt erreicht, öffnet das Auslassventil und entlässt die unter Überdruck stehenden heißen Abgase. Im Ausstoßtakt werden die verbleibenden Abgase hinausgeschoben und im Ansaugtakt durch Frischgas ersetzt.

³ Alle 4-Taktmotoren haben nur bei jeder 2ten Kurbelwellenumdrehung einen Arbeitstakt.
⁴ Der frz. Militäringenieur Nicolas Léonard Sadi Carnot (1796-1832) veröffentlichte 1824 mit seinen *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance* die theoretischen Grundlagen der Wärmekraftmaschinen



7 Stirling-Motor

In einem Stirling-Motor schieben Verdrängerkolben das Arbeitsmedium zwischen einer heißen und einer kalten Zone hin- und her. Die Temperaturwechsel erzeugen Druckschwankungen, die von Arbeitskolben in mechanische Energie umgesetzt werden.

Ein Stirling-Motor¹ hat die folgenden Daten:

Zylinderzahl	z	=	1
größtes Volumen	$V_{\max}$	=	1050 cm ³
kleinstes Volumen	$V_{\min}$	=	450 cm ³
größter Druck	$p_{\max}$	=	10 bar
höchste Temperatur	$T_{\max}$	=	650 °C
niedrigste Temperatur	$T_{\min}$	=	50 °C
Arbeitsmedium	Stickstoff		

Zustandsänderungen:

- 12 Das Arbeitsmedium wird verdichtet. Die Verdichtung verläuft isotherm, weil das Arbeitsmedium Wärme an die kalte Zone abgibt.
- 23 Das Arbeitsmedium wird isochor in die heiße Zone verschoben, gewinnt dabei Wärme vom Regenerator zurück und steigt im Druck.
- 34 Die heiße Zone gibt Wärme an das Arbeitsmedium ab, das dadurch isotherm entspannt.
- 41 Das Arbeitsmedium wird isochor in die kalte Zone verschoben und lädt dabei den Regenerator mit Wärme auf.

- 7.1 Skizzieren Sie das p,V-Diagramm des Prozesses.
- 7.2 Nummerieren Sie die Eckpunkte des Diagramms beginnend mit der Verdichtung.
- 7.3 Tabellieren Sie die Zustandsgrößen V, p und T für alle 4 Zustände.

Wärmebilanz

- 7.4 Welche Wärmemenge Q_{12} wird abgegeben?
- 7.5 Berechnen Sie die Wärmeenergie Q_{34} , die dem Arbeitsmedium zugeführt wird.
- 7.6 Welche Wärmemenge wird im Regenerator zwischengespeichert?
- 7.7 Markieren Sie Wärmezu- und abfuhr im p,V-Diagramm.

Mechanische Arbeit

- 7.8 Berechnen Sie die Kompressionsarbeit W_{12} , die Expansionsarbeit W_{34} und die Nutzenergie W_{Nutz} je Umdrehung.
- 7.9 Markieren Sie die Arbeiten im p,V-Diagramm.
- 7.10 Vergleichen Sie die Wärmebilanz mit der Nutzarbeit.

Sonstiges

- 7.11 Welche Leistung gibt der Motor theoretisch ab, wenn er mit 500 min⁻¹ dreht?²
- 7.12 Wie groß ist der Wirkungsgrad in diesem theoretischen Modell?
- 7.13 Wie hoch kann der Wirkungsgrad maximal werden?

8 Gasturbine

Quelle: [Baucke 1982] S.102

Funktionsweise einer Gasturbine mit Werten:

- Ein Verdichter saugt Luft an und verdichtet sie adiabatisch. ($p_1 = 1$ bar, $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $p_2/p_1 = 7,6$)
- Die verdichtete Luft strömt durch eine Brennkammer, wo bei gleichbleibendem Druck stetig Brennstoff verbrannt wird ($\rightarrow$ Wärmezufuhr).
- In einer Turbine wird die heiße Luft adiabatisch entspannt und gibt mechanische Arbeit ab.
- Bei einer offenen Gasturbine entweichen die Gase ins Freie (isobarer Prozess, $p_4 = 1$ bar) und nehmen auch Wärme mit.

Randbedingungen

- Die Temperatur ausgangs der Brennkammer bzw. eingangs der Turbine ist durch Werkstoffe und Kühlmöglichkeit in der Turbine begrenzt. ($T_3 = 1150$ K)

- 8.1 Skizzieren Sie das p,V-Diagramm des Prozesses.
- 8.2 Nummerieren Sie die Eckpunkte des Diagramms mit der Nummer 1 zu Beginn der Verdichtung.
- 8.3 Tabellieren Sie die Zustandsgrößen V (pro Sekunde), p und T für alle 4 Zustände bei einem Volumenstrom $\dot{V} = 50$ m³/s.

Wärmebilanz

- 8.4 Berechnen Sie die spezifische Wärmeenergie q_{23} , die in der Brennkammer zugeführt wird.
- 8.5 Welche spezifische Wärmemenge q_{41} wird abgegeben?
- 8.6 Markieren Sie Wärmezu- und abfuhr im p,V-Diagramm.

Mechanische Arbeit

- 8.7 Berechnen Sie spezifische Nutzenergie w_{Nutz} .
- 8.8 Markieren Sie die Arbeiten im p,V-Diagramm.

Sonstiges

- 8.9 Welche Leistung gibt die Gasturbine ab?
- 8.10 Berechnen Sie den Wirkungsgrad dieser Gasturbine?
- 8.11 Vergleichen Sie den Carnot-Wirkungsgrad einer Gasturbine mit dem eines Ottomotors.

9 Fiktiver Kreisprozess

Ein Prototyp wird mit den folgenden Zustandsgrößen getestet, die Zustandsänderung 3 $\rightarrow$ 4 verläuft isotherm:

Zustand	1	2	3	4
p [bar]	0,9	42,78	42,78	
V [cm ³]	500	25		500
T [K]	323,2	768,1	1500	

- 9.1 Berechnen Sie die fehlenden Werte V_3 , p_4 und T_4 .
- 9.2 Welches Arbeitsgas wird verwendet?
- 9.3 Zeichnen Sie den Kreisprozess maßstäblich in ein pV-Diagramm und benennen Sie die Zustandsänderungen.

¹ Quelle: [Viebach HP]

² Ein vergleichbarer realer Motor leistet etwa 500W



Prozesse mit realen Fluiden

- 10 Kohlekraftwerk
Im Dampferzeuger wird überhitzter Dampf isobar aus Speisewasser erzeugt.
In einer Turbine wird der Dampf entspannt und dabei mechanische Energie gewonnen.
Im Kühlturm kondensiert der Dampf isobar.
Das verdunstete Wasser wird ersetzt und zusammen mit dem Kondensat als Speisewasser im Dampferzeuger verwendet.
- Daten:
- | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|----------|
| Druck im Dampferzeuger: | $p_D =$ | 50 bar |
| Temperatur vor der Turbine: | $\vartheta_{\text{ein}} =$ | 527 °C |
| Entropie bei Turbinenaustritt: | $s_{\text{TA}} =$ | 8 kJ/kgK |
| Druck im Kondensator: | $p_K =$ | 0,04 bar |
| Speisewassertemperatur: | $\vartheta_{\text{Dein}} =$ | 27 °C |
| Heizkesselverluste: | | 10 % |
| Dampfturbinenwirkungsgrad: | $\eta_T =$ | 0,45 |
| Generatorwirkungsgrad: | $\eta_G =$ | 0,95 |
| Durchschnittliche Leistung | $P =$ | 100 MW |
- 10.1 Skizzieren Sie ein Blockschaltbild des Kohlekraftwerkes.
- 10.2 Zeichnen Sie ein maßstäbliches Energieflussdiagramm (Sankey-Diagramm), und geben Sie darin die Energiemengen pro Tag an.
- 10.3 Wie groß ist der gesamte Wirkungsgrad des Kraftwerkes?
- 10.4 Wie hoch ist der durchschnittliche Tagesbedarf an Steinkohle?
- 10.5 Tragen Sie die Zustandsänderungen des Dampfes in ein T,s-Diagramm von Wasser ein.
- 10.6 Berechnen Sie mit Hilfe des T,s-Diagrammes die von der Turbine abgegebene spezifische Arbeit. Nähern Sie dazu die Kurven durch Geraden an.
- 10.7 Geben Sie den thermischen Wirkungsgrad des Prozesses an.
- 11 Wärmepumpe fehlt

Sonstiges

- 12 Kolbendampfmaschine
Quelle [Niederstraßer] S.67ff
Eine Zwillingslokomotive hat die folgenden Daten:
- | | | |
|-------------------|-------------------------------------|-------------------|
| Zylinderzahl | $z =$ | 2 |
| Hubraum | $V_h =$ | 13 l ¹ |
| | $= V_{\text{max}} - V_{\text{min}}$ | |
| Schädlicher Raum | $V_{\text{min}} =$ | 1 l |
| Kesseldruck | $p =$ | 16 bar |
| Arbeitsmedium | | Wasserdampf |
| Wärmekapazitäten: | $c_p =$ | 1,90 kJ/kgK |
| | $c_v =$ | 1,44 kJ/kgK |
- Zustandsänderungen:
- 1-2: Der Kolben schiebt Wasserdampf bei einem Druck von 1 bar aus dem Zylinder².
 - 2-3: Ab einem Zylindervolumen $V_{K0} = 3,5$ l wird das Ausströmröhr geschlossen und der Restdampf adiabatisch komprimiert³.
 - 3-4: Im kleinsten Volumen beginnt das Einströmen des Dampfes. Wegen der Strömungsverluste in den Rohrleitungen steigt der Zylinderdruck nur bis 1 bar unter dem Kesseldruck.
 - 4-5: Auch bei bewegtem Kolben strömt Dampf bei konstantem Druck⁴ ein. Das Schließen der Dampfzufuhr wird so gesteuert, dass $p_6 = 1,5$ bar beträgt.
 - 5-6: Danach entspannt sich der Dampf, die Kurve verläuft etwa entlang einer Hyperbel⁵.
 - 6-1: Nach Öffnen der Ausströmröhre sinkt der Druck bei konstantem Volumen auf p_1 .
- 12.1 Skizzieren Sie das p,V-Diagramm des Prozesses.
- 12.2 Nummerieren Sie die Eckpunkte des Diagrammes mit der Nummer 1 zu Beginn der Verdichtung.
- 12.3 Tabellieren Sie die Zustandsgrößen V und p für alle Eckpunkte des Kreisprozesses.
- Auszüge aus der Wasserdampf tafel
- [Dubbel 20] D36; [Niederstraßer] S.46

¹ Der Hubraum ergibt sich aus einem üblichen Kolbendurchmesser $d = 50$ cm bei einem Kolbenhub $s = 660$ mm.

² Tatsächlich liegt der Restdruck wegen des Strömungswiderstandes in den Ausströmröhren bei 1,1.. 1,3 bar. Die mir vorliegende Ausgabe des [Niederstraßer] von 1940 gibt diese Werte mit der Einheit kg/cm² an, die man ohne Umrechnen durch bar ersetzen kann.

³ Das Schließen der Ausströmröhre geschieht beim so genannten Kompressionspunkt. Die Kompression des Restdampfes soll die bewegten Massen (Kolben, Pleuelstange usw.) abfedern und den Druckaufbau beim Wiederbefüllen des Zylinders beschleunigen.

⁴ Das Einströmen bei Kolbenbewegung heißt auch Füllung. Es steigert die Leistung, verringert aber den Wirkungsgrad durch überproportional hohen Dampfverbrauch.

⁵ Die Entspannung sieht aus wie eine isotherme Zustandsänderung, aber die Temperatur verläuft etwa an der Taupunktklinie, Nassdampf kondensiert teilweise, Sattampf kaum. ([Niederstraßer] S.70)



B Lösungen

Eine häufige Fehlerquelle bei diesen Aufgaben ist das Umrechnen der Einheit [bar], deshalb möchte ich diese Einheit vorab erläutern.

Ursprünglich wurde Druck in [kg/cm²] angegeben¹ und, als man genauer zwischen Masse und Kraft unterschied², durch [kp/cm²] ersetzt³. Mit der Einführung des internationalen Einheitensystems⁴ SI wurden die Einheiten N (Newton = (kg m) / s² für die Kraft)⁵ und Pa (Pascal = N / m² für den Druck) eingeführt. Techniker kleben gerne an alten Zahlenwerten⁶ und halten sich an das bar. Es gelten:

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \approx 1 \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2} = 1 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} = \frac{10 \text{ N}}{\text{cm}^2} = \frac{\text{N}}{10 \text{ mm}^2} = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

Gasgesetze

- 1 Luftmasse im Klassenzimmer ($V = 8 \cdot 8 \cdot 4 \text{ m}^3$).

1.1 ...

$$1.2 \quad \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = V \cdot \rho = 8 \text{ m} \cdot 8 \text{ m} \cdot 4 \text{ m} \cdot 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 331 \text{ kg}$$

- 1.3 $p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T \Rightarrow$

$$R_i = \frac{p \cdot V}{m \cdot T} = \frac{p}{\rho \cdot T} = \frac{1,013 \text{ bar}}{1,293 \text{ kg/m}^3 \cdot 273,15 \text{ K}}$$

$$= \frac{1,013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}{1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 273,15 \text{ K}} = 287 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{K} \cdot \text{m}^2} = 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

- 1.4 Die Masse m im Zimmer ist ungenau hinsichtlich des Volumens, des Luftdruckes und der Temperatur.

Die spezifische Gaskonstante R_i ist innerhalb Rundungsgenauigkeit korrekt, wenn man mit den für die Dichte gültigen Werte rechnet, selbst wenn man die Werte aus 1.1 einsetzt.

- 2 Sauerstoffflasche

- 2.1 $p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T$

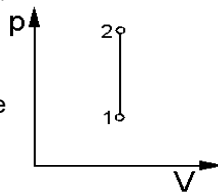
$$m = \frac{p \cdot V}{R_i \cdot T} = \frac{100 \text{ bar} \cdot 50 \text{ dm}^3}{260 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (20 + 273) \text{ K}} = 6,56 \text{ kg}$$

$$2.2 \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{6,56 \text{ kg}}{50 \text{ dm}^3} = 0,131 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 131 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- 2.3 Es handelt sich um eine isochore Zustandsänderung (mit konstantem Volumen).

- 2.4 Da sich hier weder die Art noch die Masse des Gases ändern, kann man das Gasgesetz wie folgt vereinfachen:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = m \cdot R_i = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$



Mit konstantem Volumen (isochor!) erhält man das Gesetz von Amontons:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \text{const.} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}$$

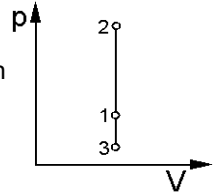
$$p_2 = p_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = 100 \text{ bar} \cdot \frac{(50 + 273) \text{ K}}{(20 + 273) \text{ K}} = 110 \text{ bar}$$

- 2.5 Es handelt sich um wiederum eine isochore Zustandsänderung. Man kann von 1 nach 3 oder von 2 nach 3 rechnen.

$$p_3 = p_1 \cdot \frac{T_3}{T_1} = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2}$$

$$= 100 \text{ bar} \cdot \frac{(-5 + 273) \text{ K}}{(20 + 273) \text{ K}} = 91,5 \text{ bar}$$

$$= 110 \text{ bar} \cdot \frac{(-5 + 273) \text{ K}}{(50 + 273) \text{ K}} = 91,5 \text{ bar}$$



- 2.6 Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob man von der erwärmten oder der abgekühlten Flasche ausgeht. Wichtig ist nur die Austrittstemperatur 20°C, die z.B. durch Temperaturanpassung im Schlauch erreicht werden kann.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \frac{p_3 \cdot V_3}{T_3} = \frac{p_4 \cdot V_4}{T_4} \Rightarrow$$

$$V_4 = V_1 \cdot \frac{T_4 \cdot p_1}{T_1 \cdot p_4} = 50 \text{ l} \cdot \frac{(20 + 273) \text{ K} \cdot 100 \text{ bar}}{(20 + 273) \text{ K} \cdot 2,5 \text{ bar}}$$

$$V_4 = 2,0 \text{ m}^3$$

- 3 Pneumatikzylinder

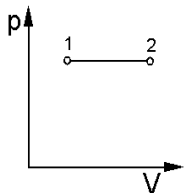
- 3.1 Es handelt sich um eine isobare Zustandsänderung.

- 3.2 Mit konstantem Druck (isobar!) erhält man das Gesetz von Gay-Lussac:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{V_2}{V_1} = (20 + 273) \text{ K} \cdot \frac{11 \text{ l}}{10 \text{ l}}$$

$$= 322,3 \text{ K} = 49^\circ \text{C}$$

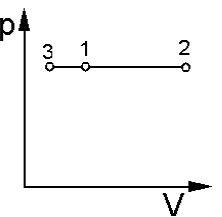


- 3.3 Es handelt sich ebenfalls um eine isobare Zustandsänderung. Im Lösungsvorschlag wird der Weg von 1 nach 3 verwendet, von 2 nach 3 wäre auch möglich.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \Rightarrow$$

$$V_3 = V_1 \cdot \frac{T_3}{T_1} = 10 \text{ l} \cdot \frac{273 \text{ K}}{(20 + 273) \text{ K}}$$

$$= 9,3 \text{ l}$$



¹ Damals baute man auf den üblichen Einheiten auf und traf auch noch recht genau den Atmosphärendruck am Boden. Für technische Anwendungen wurde „Atue“ verwendet: 2 Atue (Atmosphärenüberdruck) sind heute etwa 2 bar über Luftdruck, also etwa 3 bar absolut.

² Der Unterschied zwischen Kraft und Masse ist für Physiker elementar, für Techniker eher akademisch. Hauptsache, man kann die alten Tabellen weiter verwenden. Die Einheit bar entspricht der alten Einheit kp/cm² und weicht nur um 2% vom noch älteren kg/cm² ab.

³ Ein Kilopond [kp] entspricht der Gewichtskraft, die eine Masse von 1 kg an der Erdoberfläche erfährt.

⁴ Im SI-System sind die 7 Basisgrößen Länge in Meter (m), Masse in Kilogramm (kg), Zeit in Sekunde (s), Stromstärke in Ampere (A), Temperatur in Kelvin (K), Stoffmenge in Mol (mol) und Lichtstärke in Candela (cd) definiert, alle andere Größen davon abgeleitet. Ein Vorteil des Systems ist, dass man nicht zwischen Einheiten umrechnen muss wie zwischen Meter, Zoll und Meile oder zwischen PS und kW oder zwischen psi (pound-force per square inch), Torr (mm Quecksilbersäule) und bar.

⁵ Nach dem engl. Wissenschaftler Isaac Newton (1642 – 1726), der neben vielem anderen auch das Gravitationsgesetz beschrieb, dabei den Begriff „Kraft“ sauber definierte und damit eine der wichtigsten Grundsteine für die moderne Wissenschaft legte.

⁶ Nach dem frz. Physiker und Mathematiker Blaise Pascal (1623 – 1662)



4 Fahrradluftpumpe

- 4.1 Es handelt sich um eine isotherme Zustandsänderung. Mit konstanter Temperatur (isotherm!) erhält man das Gesetz von *Boyle / Mariotte*.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} \rightarrow$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1 \text{ bar} \cdot \frac{100 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}^3} = 20 \text{ bar}$$

- 4.2 Es handelt sich um eine adiabatische Zustandsänderung (Gesetz von *Poisson*).

$$p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa \rightarrow$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^\kappa = 1 \text{ bar} \cdot \left[\frac{100 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}^3} \right]^{1,4} = 66,3 \text{ bar}$$

- 4.3 a) Isotherm: $T_1 = T_2 = 20^\circ\text{C}$

b) Adiabats:

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}^3} \right)^{1,4-1} \text{ oder}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} = 293 \text{ K} \cdot \frac{66,3 \text{ bar} \cdot 5 \text{ cm}^3}{1 \text{ bar} \cdot 100 \text{ cm}^3} = 971 \text{ K} = 698^\circ\text{C}$$

- 4.4 fehlt

- 4.5 Masse der Luft in der Pumpe:

$$p \cdot V = m \cdot R_i \cdot T$$

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{R_i \cdot T_1} = \frac{1000 \text{ hPa} \cdot 100 \text{ cm}^3}{287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (20+273) \text{ K}} = 0,119 \text{ g}$$

a) Isotherm:

$$\begin{aligned} W_{12} &= -m \cdot R_i \cdot T_{1/2} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= -0,119 \text{ g} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot (20+273) \text{ K} \cdot \ln \frac{5 \text{ cm}^3}{100 \text{ cm}^3} \\ &= 30,0 \text{ J} \end{aligned}$$

b) Adiabatisch:

$$\begin{aligned} W_{12} &= -\frac{m \cdot R_i \cdot T_1}{1-\kappa} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right] \\ &= -\frac{0,119 \text{ g} \cdot 287 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 293 \text{ K}}{1-1,4} \cdot \left[\left(\frac{100 \text{ cm}^3}{5 \text{ cm}^3} \right)^{1,4-1} - 1 \right] \\ &= 57,9 \text{ J} \end{aligned}$$

- 4.6 Schnelles Pumpen erzeugt in der Pumpe eine höhere Temperatur, die mit höherem Druck und mehr Arbeit einhergeht. Der zusätzliche Druck geht wieder verloren, sobald die Luft im Reifen abkühlt, während der Oberarmmuskel länger müde bleibt. So gesehen ist schnelles Pumpen nachteilig. In der Praxis ist schnelles Pumpen von Vorteil, wenn die Luftpumpe nicht ganz dicht ist. Beim schnellen Pumpen bleibt der komprimierten Luft weniger Zeit, durch Undichtigkeiten zu verschwinden, und man bringt mehr Luft in den Reifen.

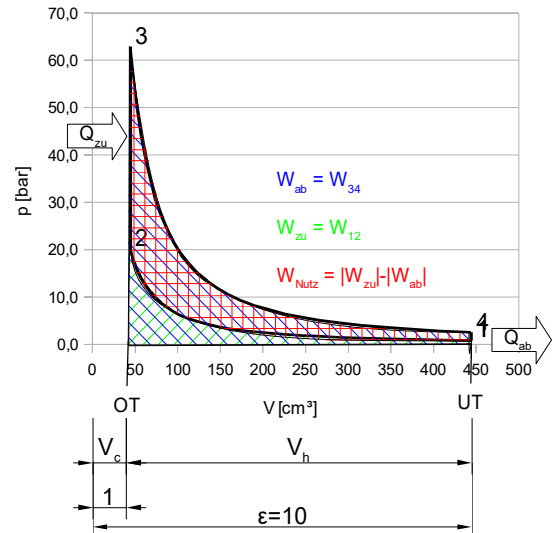
Motoren

- 5 4-Takt-Ottomotor¹

5.1

p,V-Diagramm

4-Takt-Ottomotor



- 5.2 siehe Aufgabe 5.1

- 5.3 Luftmasse je Zylinder und Hub

$$\text{Einzelhubraum } V_h \\ V_h = \frac{V_H}{z} = \frac{2000 \text{ cm}^3}{5} = 400 \text{ cm}^3$$

Masse des angesaugten Frischgases m_0 :

$$p_1 \cdot V_h = m_0 \cdot T_1 \cdot R_s \Rightarrow$$

$$m_0 = \frac{p_1 \cdot V_h}{T_1 \cdot R_s} = \frac{0,8 \text{ bar} \cdot 400 \text{ cm}^3}{(273,15+80) \text{ K} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}$$

$$m_0 = \frac{0,8 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 400 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{kgK}}{353,15 \text{ K} \cdot 287 \text{ J}}$$

$$m_0 = 0,316 \text{ g}$$

- 5.4 Das Verdichtungsverhältnis ist $V_{\max}$ durch $V_{\min}$.

$V_{\min}$ = Verbrennungsraum V_c

$V_{\max} = V_c + \text{Einzelhubraum } V_h$

$$\epsilon = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{V_h + V_c}{V_c} \Rightarrow$$

$$V_2 = V_c = \frac{V_h}{(\epsilon-1)} = \frac{400 \text{ cm}^3}{10-1} = 44,4 \text{ cm}^3$$

$$V_1 = V_{\max} = V_h + V_c = 400 \text{ cm}^3 + 44,4 \text{ cm}^3 = 444,4 \text{ cm}^3$$

Die Masse des gesamten Gases (inkl. Restgas aus dem vorherigen Takt) bei sonst gleichen Zustandsgrößen kann man wie oben berechnen.

$$p_1 \cdot V_{\max} = m \cdot T_1 \cdot R_s \rightarrow$$

$$m = \frac{p_1 \cdot V_{\max}}{T_1 \cdot R_s} = \frac{0,8 \text{ bar} \cdot 444,4 \text{ cm}^3}{(273,15+80) \text{ K} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}$$

$$m = \frac{0,8 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 444,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{kgK}}{353,15 \text{ K} \cdot 287 \text{ J}}$$

$$m = 0,351 \text{ g}$$

Hinweis zu m und m_0 siehe Fußnote.²

¹ Alle Ergebnisse wurden mit einer Tabellenkalkulation, vielen Dezimalstellen und auf der Basis von $0^\circ\text{C} = 273,15 \text{ K}$ berechnet. Bei Aufgaben dieser Art ist es völlig normal, wenn Ergebnisse im Detail abweichen.

² In den bisherigen Abituraufgaben wurde nicht konsequent zwischen der Luftmasse m im Brennraum und der frisch angesaugten Luftmasse m_0 unterschieden, deshalb akzeptiere ich bei meinen Schülern auch, wenn sie die weiteren Berechnungen mit m_0 durchführen, obwohl m richtig wäre und meine Korrektur dadurch nicht einfacher wird :-)



Man kann die Volumina auch mit den Informationen aus dem p,V-Diagramm (Aufg. 5.1) und dem Dreisatz berechnen:

$$9 \approx V_h = V_1 - V_2 = 400 \text{ cm}^3$$

$$1 \approx V_2 = \frac{400 \text{ cm}^3 \cdot 1}{9} = 44,4 \text{ cm}^3$$

$$10 \approx V_1 = \frac{400 \text{ cm}^3 \cdot 10}{9} = 444,4 \text{ cm}^3$$

5.5 Tabelle → am Ende der Lösungen zu Aufg. 5

5.6 Die Verdichtung erfolgt adiabatisch:

Temperatur 2

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = T_1 \cdot \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa-1} = T_1 \cdot (\epsilon)^{\kappa-1}$$

$$T_2 = (273,15 + 80) \text{ K} \cdot \left(\frac{444,4 \text{ cm}^3}{44,4 \text{ cm}^3} \right)^{1,4-1}$$

$$T_2 = 353 \text{ K} \cdot 10^{0,4} = 887,1 \text{ K} = 613,9^\circ \text{C}$$

Druck 2

$$\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$p_2 = p_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa} = p_1 \cdot \left(\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \right)^{\kappa} = p_1 \cdot \epsilon^{\kappa}$$

$$p_2 = 0,8 \text{ bar} \cdot \left(\frac{444,4 \text{ cm}^3}{44,4 \text{ cm}^3} \right)^{1,4}$$

$$p_2 = 0,8 \text{ bar} \cdot 10^{1,4} = 20,1 \text{ bar}$$

5.7 Die Wärmezufuhr durch Verbrennung ist isochor.

$$V_3 = V_2 = V_{\min} = 44,4 \text{ cm}^3$$

Temperatur 3 ist gegeben:

$$T_3 = (2500 + 273,15) \text{ K} = 2773,15 \text{ K}$$

Druck 2

$$p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 20,1 \text{ bar} \cdot \frac{(2500 + 273,15) \text{ K}}{887,1 \text{ K}} = 62,8 \text{ bar}$$

5.8 Zustandsgrößen nach der adiabaten Entspannung

Volumen V_4 (isochor, 'rückwärts' aus Zustand 1)

$$V_4 = V_1 = V_{\max} = 444,4 \text{ cm}^3$$

Temperatur 4 (adiabat aus Zustand 3)

$$\frac{T_3}{T_4} = \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa-1} = T_3 \cdot \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa-1} = T_3 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\kappa-1}$$

$$T_4 = 2773,15 \text{ K} \cdot \left(\frac{44,4 \text{ cm}^3}{444,4 \text{ cm}^3} \right)^{1,4-1}$$

$$T_4 = 2773,15 \text{ K} \cdot \frac{1}{10^{0,4}} = 1104 \text{ K} = 831^\circ \text{C}$$

Druck 4 (adiabat aus Zustand 3)

$$\left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{V_4}{V_3} \right)^{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$p_4 = p_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa} = p_3 \cdot \left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}} \right)^{\kappa} = p_3 \cdot \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{\kappa}$$

$$p_4 = 62,8 \text{ bar} \cdot \left(\frac{44,4 \text{ cm}^3}{444,4 \text{ cm}^3} \right)^{1,4}$$

$$p_4 = 62,8 \text{ bar} \cdot \left(\frac{1}{10} \right)^{1,4} = 2,50 \text{ bar}$$

5.9 Zugeführte Wärmemenge:

$$Q_{23} = c_v \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot (T_3 - T_2)$$

$$= 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 0,351 \text{ g} \cdot (2773 - 886,7) \text{ K}$$

$$= 475,1 \text{ J}$$

In der Aufgabenstellung wird der Begriff 'Wärmeenergie' verwendet, weil dies auch schon im Abi geschah.

5.10 Abgeführte Wärmemenge:

$$Q_{41} = c_v \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_4)$$

$$Q_{41} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 0,351 \text{ g} \cdot (353 - 1104) \text{ K}$$

$$Q_{41} = -189,1 \text{ J}$$

Das Vorzeichen muss negativ sein, weil die Wärme abgegeben wird.

5.11 Wärmebilanz:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

$$= 0 + 475,1 \text{ J} + 0 - 189,1 \text{ J} = 285,9 \text{ J}$$

5.12 siehe Kap. 5.1

5.13 Verdichtungsarbeit bei adiabatischer Kompression

$$W_{12} = \frac{-m \cdot R_s \cdot T_1}{1 - \kappa} \cdot \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

$$W_{12} = \frac{-m \cdot R_s \cdot T_1}{1 - \kappa} \cdot [\epsilon^{\kappa-1} - 1]$$

$$W_{12} = \frac{-0,351 \text{ g} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 353,15 \text{ K}}{1 - 1,4} \cdot [10^{1,4-1} - 1]$$

$$W_{12} = 134,4 \text{ J}$$

Das positive Vorzeichen weist darauf hin, dass mechanische Arbeit in den Prozess eingebracht wird.

Expansionsarbeit bei adiabatischer Entspannung

$$W_{34} = -\frac{m \cdot R_s}{1 - \kappa} \cdot (T_4 - T_3)$$

$$= -\frac{0,351 \text{ g} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{1 - 1,4} \cdot (1104 - 2773,15) \text{ K}$$

$$= -420,1 \text{ J}$$

Das negative Vorzeichen weist darauf hin, dass dem Prozess mechanische Arbeit entnommen wird.

Nutzenergie je Arbeitstakt

$$W_{\text{Nutz}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$= 134,4 \text{ J} + 0 - 420,1 \text{ J} + 0 = -285,7 \text{ J}$$

5.14 siehe Kap. 5.1

5.15 Nutzenergie und Wärmebilanz haben bis auf Rundungsungenauigkeiten denselben Betrag. Dies ist nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik $W + Q = \Delta U$ auch zu erwarten, weil sich in Kreisprozessen die innere Energie nicht ändern darf¹: $\Delta U = 0$

¹ Würde sich bei einem Umlauf des Prozesses die innere Energie ändern, würde sie bei einem Kreisprozess ständig wachsen oder sinken, und das kann nicht gut sein.



5.16 Erforderliche Kraftstoffmenge je Einspritzung

$$Q = m_{Kr} \cdot H_u \Rightarrow$$

$$m_{Kr} = \frac{Q_{23}}{H_u} = \frac{475,1 J}{43 \frac{MJ}{kg}} = 11,0 mg$$

$$V_{Kr} = \frac{m_{Kr}}{\rho_{Kr}} = \frac{11,0 mg}{0,75 \frac{g}{cm^3}} = 14,7 mm^3$$

(Diese Aufgabe ist nicht typisch für bisheriger Abi-Aufgaben an TGs in Baden-Württemberg)

5.17 Kraftstoffverbrauch je Stunde berechnet man aus: Kraftstoffmenge m_{Kr} je Arbeitstakt und Zylinder 5 Zylinder

1 Arbeitstakt je 2 Umdrehungen (Viertakt-Prinzip)
3000 Umdrehungen je Minute

60min je Stunde dient der Umrechnung

Alle Größen außer den gewünschten müssen gekürzt werden können.

$$\dot{m}_{Kr} = \frac{m_{Kr} \cdot 5 \text{ Zylinder}}{\text{Arbeitstakt} \cdot \text{Zylinder}} \cdot \frac{1 \text{ Arbeitstakt}}{2 \text{ Umdrehung}} \cdot \frac{3000 \text{ Umdrehung}}{60 \text{ min}} \cdot \frac{h}{h}$$

$$\dot{m}_{Kr} = \frac{11,0 mg \cdot 5 \cdot 3000 \cdot 60}{2 h} = 4,97 \frac{kg}{h}$$

$$\dot{V}_{Kr} = \frac{\dot{m}_{Kr}}{\rho_{Kr}} = \frac{4,97 kg/h}{0,75 kg/dm^3} = 6,63 \frac{l}{h}$$

(Die Schreibweise $\dot{m}$ bedeutet Massenstrom, d.h. Masse pro Zeit. Volumenstrom $\dot{V}$ sinngemäß.

Man beachte, dass sich die „Einheiten“ Zylinder, Arbeitstakt usw. herauskürzen)

5.18 Leistungsabgabe bei 3000 min⁻¹

$$P = \frac{W_{Nutz}}{t}$$

$$P = \frac{|-285,7 J|}{\text{Arbeitstakt} \cdot \text{Zylinder}} \cdot 5 \text{ Zylinder} \cdot \frac{1 \text{ Arbeitstakt}}{2 \text{ Umdrehung}} \cdot \frac{3000 \text{ Umdrehung}}{60 s}$$

$$P = 35,7 kW$$

Beachten Sie, dass sich bei dieser Schreibweise alle „Einheiten“ kürzen lassen außer J/s = W.

5.19 Wirkungsgrad¹

$$\eta = \frac{W_{Nutz}}{Q_{zu}} = \frac{|-285,7 J|}{475,1 J} = 0,60$$

5.20 Maximal möglicher Wirkungsgrad²

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{353,15 K}{27731,5 K} = 0,873 = 87,3 \%$$

Alle Werte des Viertakt-Motors:

Aufgabe: Ub 05-Ottomotor											
1E+05	0,00	1E+00	1E+00	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+00	1E+00
Typ	p	V	K	T	ϑ	W	q ₊	Q	m	cp	Rs
Zustand	bar	dm ³	K	K	°C	J	kJ/kg	J	g	kJ/kgK	kJ/kgK
1	0,80	0,444	353,2	80,00	383	134,4	0,0	0,0	0,351	1,005	0,718
12	a										
2	20,10	0,044	887,1	613,92	0	0,0	1354,2	475,1	0,351	1,005	0,718
23	c										
3	62,82	0,044	2773,2	2500,00	-1197,6	-420,1	0,0	0,0	0,351	1,005	0,718
34	a										
4	2,50	0,444	1104,0	830,86	0,0	0,0	-539,1	-189,1	0,351	1,005	0,718
41	c										
1	0,80	0,444	353,2	80,00	ΣW _{Nutz}	ΣW _{nu}	Σq	ΣQ		η _{therm}	
					-815	-285,7	815,1	285,9		0,601	
					ΣW _{ab}	ΣW _{ab}	Σq _{ab}	ΣQ _{ab}		η _{Carnot}	
					-1198	-420,1	-539,1	-189,1		0,873	
					ΣW _{zu}	ΣW _{zu}	Σq _{zu}	ΣQ _{zu}			
					383	134,4	1354,2	475,1			

Lösungen für Kreisprozesse mit
idealen Gasen (p,V-Diagramm)
© <https://ulrich-rapp.de>

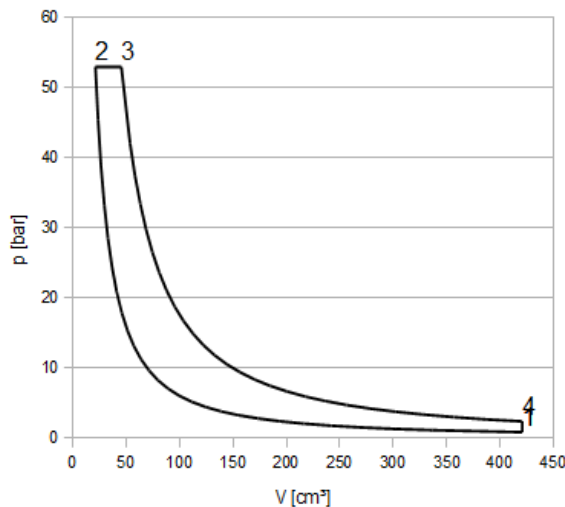
¹ In der Praxis erreichen Ottomotoren Wirkungsgrade von knapp über 30%, aber nur im optimalen Betriebspunkt, der bei komfortablen Kfz bei niedrigen Drehzahlen und (fast) Vollast (=Vollgas) liegt.

² Der Carnotsche Wirkungsgrad η_{Carnot} ist der höchste Wirkungsgrad, den eine Wärmekraftmaschine bei den gegebenen Temperaturniveaus theoretisch erreichen kann.

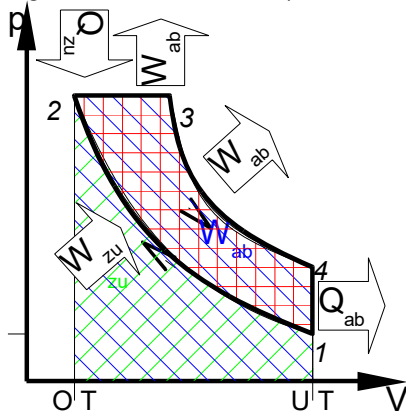


6 Dieselmotor

6.1 p,V-Diagramm Dieselmotor



6.2 (einigermaßen maßstäblich)



(unmaßstäblich)

6.3 Luftmasse je Zylinder und Hub Einzelhubraum V_h

$$V_h = \frac{V_H}{z} = \frac{2000 \text{ cm}^3}{5} = 400 \text{ cm}^3$$

Masse des angesaugten Frischgases m_0 :

$$m_0 = \frac{p_1 \cdot V_h}{T_1 \cdot R_s} = \frac{0,8 \text{ bar} \cdot 400 \text{ cm}^3}{(273,15 + 80) \text{ K} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}} = 0,316 \text{ g}$$

6.4 Volumina 1 und 2 aus Verdichtungsverhältnis ϵ und Hubraum V_h :

$$V_1 = V_{\max} = V_h \cdot \frac{\epsilon}{\epsilon - 1} = 400 \text{ cm}^3 \cdot \frac{20}{20 - 1} = 421,05 \text{ cm}^3$$

Masse aus dem Gesetz für ideale Gase:

$$m = \frac{p_1 \cdot V_{\max}}{T_1 \cdot R_s} = \frac{0,8 \text{ bar} \cdot 421,05 \text{ cm}^3}{(273,15 + 80) \text{ K} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}} = 0,332 \text{ g}$$

6.5 Tabelle → am Ende der Lösungen zu Aufg. 6

6.6 Die Verdichtung erfolgt adiabatisch:

Temperatur im Punkt 2:

$$T_2 = T_1 \cdot \epsilon^{\kappa - 1} = 353 \text{ K} \cdot 20^{0,4} = 1170,5 \text{ K} = 897,35^\circ \text{C}$$

Druck im Punkt 2:

$$p_2 = p_1 \cdot \epsilon^{\kappa} = 0,8 \text{ bar} \cdot 20^{1,4} = 53,0 \text{ bar}$$

Volumen im Punkt 2:

$$V_2 = V_{\min} = V_c = \frac{V_h}{(\epsilon - 1)} = \frac{400 \text{ cm}^3}{20 - 1} = 21,05 \text{ cm}^3$$

6.7 Die Wärmezufuhr durch Verbrennung ist isobar

Druck im Punkt 3 $p_3 = p_2 = 53,0 \text{ bar}$

Temperatur im Punkt 3 aus der zugeführten Wärmemenge durch Einspritzung und Verbrennung:

$$m_{Kr} = V_{Kr} \cdot \rho_{Kr} = 12,8 \text{ mm}^3 \cdot 0,83 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3} = 10,624 \text{ mg}$$

$$Q_{23} = m_{Kr} \cdot H_u = 10,624 \text{ mg} \cdot 42500 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} = 451,5 \text{ J}$$

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T \Rightarrow$$

$$\Delta T_{23} = \frac{Q_{23}}{m_1 \cdot c_p} = \frac{451,5 \text{ J} \cdot \text{kgK}}{0,332 \text{ g} \cdot 1005 \text{ J}} = 1351,8 \text{ K}$$

$$T_3 = T_2 + \Delta T_{23} = 1170,5 \text{ K} + 1351,8 \text{ K} = 2522,3 \text{ K}$$

Volumen im Punkt 3 (nach der Verbrennung)

$$V_3 = V_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 21,05 \text{ cm}^3 \cdot \frac{2522,3 \text{ K}}{1170,5 \text{ K}} = 45,4 \text{ cm}^3$$

6.8 Zustandsgrößen nach der adiabaten Entspannung

Volumen V_4 (isochor 'rückwärts' aus Zustand 1)

$$V_4 = V_1 = V_{\max} = 421,05 \text{ cm}^3$$

Temperatur 4 (adiabat aus Zustand 3)

$$T_4 = T_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa - 1} = 2522,3 \text{ K} \cdot \left(\frac{45,4 \text{ cm}^3}{421 \text{ cm}^3} \right)^{1,4 - 1} = 1034,5 \text{ K}$$

Druck 4 (adiabat aus Zustand 3)

$$p_4 = p_3 \cdot \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\kappa} = 53 \text{ bar} \cdot \left(\frac{45,4 \text{ cm}^3}{421 \text{ cm}^3} \right)^{1,4} = 2,34 \text{ bar}$$

6.9 Zugeführte Wärmemenge:

$$Q_{23} = c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_p \cdot m \cdot (T_3 - T_2) = 451,5 \text{ J}$$

$$= 1,005 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 0,332 \text{ g} \cdot (2522,3 - 1170,5) \text{ K}$$

bzw. aus der Lösung zu Aufgabe 6.7.

$Q_{23} > 0 \rightarrow$ Wärme wird in das System eingebracht

6.10 Abgeführte Wärmemenge:

$$Q_{41} = c_v \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_4) = -162,6 \text{ J}$$

$$Q_{41} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 0,332 \text{ g} \cdot (353,2 - 1034,5) \text{ K}$$

$Q_{41} < 0 \rightarrow$ Wärme wird aus dem System abgegeben

6.11 Wärmebilanz:

$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

$$= 0 + 451,5 \text{ J} + 0 - 162,6 \text{ J} = 288,9 \text{ J}$$

6.12 siehe Aufgabe 6.2

6.13 Arbeit W_{12} bei adiabatischer Kompression

$$W_{12} = \frac{-m \cdot R_s \cdot T_1}{1 - \kappa} \cdot [\epsilon^{\kappa - 1} - 1] = 194,9 \text{ J}$$

$$= \frac{-0,332 \text{ g} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 353,15 \text{ K}}{1 - 1,4} \cdot [20^{1,4 - 1} - 1]$$

$W_{12} > 0 \rightarrow$ Arbeit wird in das System eingebracht

Arbeit W_{23} bei der isobaren Verbrennung

$$W_{23} = -p_2 \cdot \Delta V_{23} = -p_2 \cdot (V_3 - V_2)$$

$$= -53,0 \text{ bar} \cdot (45,4 \text{ cm}^3 - 21,05 \text{ cm}^3) = -128,9 \text{ J}$$

Arbeit W_{34} bei der adiabatischen Entspannung

$$W_{34} = -\frac{m \cdot R_s}{1 - \kappa} \cdot (T_4 - T_3) = -354,8 \text{ J}$$

$$= -\frac{0,332 \text{ g} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{1 - 1,4} \cdot (1034,5 - 2522,3) \text{ K}$$

$$= -\frac{0,332 \text{ g} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{1 - 1,4} \cdot (1034,5 - 2522,3) \text{ K}$$

$W < 0 \rightarrow$ Arbeit wird dem System entnommen

Expansionsarbeit bei adiabatischer Entspannung

Nutzarbeit je Arbeitstakt

$$W_{\text{Nutz}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$= 194,9 \text{ J} - 128,9 \text{ J} - 354,8 \text{ J} + 0 = -288,8 \text{ J}$$



6.14 Aufgabe 6.2

6.15 siehe Kap. 5.15

6.16 siehe Kap. 6.7

6.17 Kraftstoffverbrauch je Stunde

$$\dot{m}_{Kr} = \frac{m_{KR} \cdot 5 \text{ Zylinder}}{\text{Arbeitstakt} \cdot \text{Zylinder}} \cdot \frac{1 \text{ Arbeitstakt}}{2 \text{ Umdrehung}} \cdot \frac{3000 \text{ Umdrehung}}{60 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$$

$$\dot{m}_{Kr} = \frac{10,642 \text{ mg} \cdot 5 \cdot 3000 \cdot 60}{2 \cdot h} = 4,67 \frac{\text{kg}}{\text{h}}$$

$$\dot{V}_{Kr} = \frac{\dot{m}_{Kr}}{\rho_{Kr}} = \frac{4,67 \text{ kg/h}}{0,83 \text{ kg/dm}^3} = 5,625 \frac{\text{l}}{\text{h}}$$

6.18 Leistungsabgabe bei 3000 min⁻¹

$$P = \frac{W_{Nutz}}{t}$$

$$P = \frac{|-288,8 \text{ J}|}{\text{Arbeitstakt} \cdot \text{Zylinder}} \cdot 5 \text{ Zylinder} \cdot \frac{1 \text{ Arbeitstakt}}{2 \text{ Umdrehung}} \cdot \frac{3000 \text{ Umdrehung}}{60 \text{ s}}$$

$$P = 36,1 \text{ kW}$$

6.19 Thermischer Wirkungsgrad¹

$$\eta = \frac{W_{Nutz}}{Q_{zu}} = \frac{|-288,8 \text{ J}|}{|451,5 \text{ J}|} = 0,64$$

6.20 Carnot-Wirkungsgrad

$$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{353,15 \text{ K}}{2522,3 \text{ K}} = 0,860 = 86,0\%$$

Alle Werte des Diesel-Motors:

Ergebnisse		Aufgabe: Ub 06-Dieselmotor													
		1E+05	0,00	1E+00	1E+00	1E+03	1E+00	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+00	1E+00	1E+00	1E+00
Typ	1	bar	dm ³	K	T	°C	kg	J	kJ/kg	g	m	cp	cv	Rs	ε
Zustand	1	p	V	T	ϑ	w ₊	w ₋	W	q ₊	q ₋	Q	J	Q	Q	ε
1	a	0,80	0,4211	353,2	80,00	586	194,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,332	1,005	0,718	1,400
12	a	53,03	0,0211	1170,5	897,35	-388	-128,9	1358,5	451,5	0,0	0,0	0,332	1,005	0,718	1,400
23	b	53,03	0,0454	2522,3	2249,13	-1067,4	-354,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,332	1,005	0,718	1,400
34	a	2,34	0,4211	1034,5	761,40	0,0	0,0	-489,2	-162,6	0,0	0,0	0,332	1,005	0,718	1,400
41	c	0,80	0,4211	353,2	80,00	586	194,9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,332	1,005	0,718	1,400
1						ΣwNutz	ΣWnu	Σq	ΣQ						
						-869	-288,8	869,3	288,9						
						Σwab	ΣWab	Σqab	ΣQab						
						-1455	-483,7	-489,2	-162,6						
						Σwzu	ΣWzu	Σqzu	ΣQzu						
						586	194,9	1358,5	451,5						

Lösungen für Kreisprozesse mit
idealen Gasen (p, V-Diagramm)
© <https://ulrich-rapp.de>

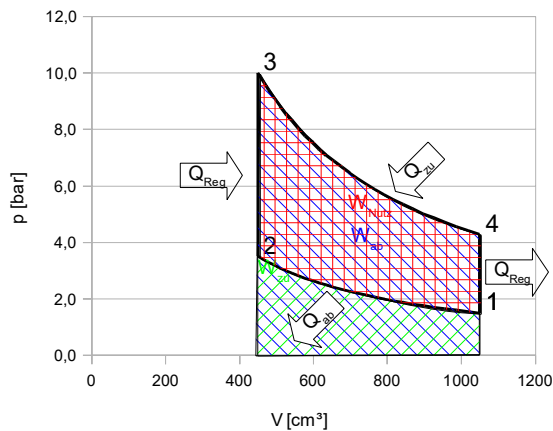
¹ In der Praxis erreichen Ottomotoren Wirkungsgrade von knapp über 30%, aber nur im optimalen Betriebspunkt, der bei komfortablen Kfz bei niedrigen Drehzahlen und (fast) Vollast (=Vollgas) liegt.



7 Stirlingmotor
7.1

p,V-Diagramm

Stirling-Prozess



7.2 siehe Kap. 7.1

7.3 Zustandsgrößen:

Volumina entlang der Isochoren → pV-Diagramm:

$$V_1 = V_4 = V_{\max} = 1050 \text{ cm}^3$$

$$V_2 = V_3 = V_{\min} = 450 \text{ cm}^3$$

Temperaturen entlang der Isothermen:

$$T_1 = T_2 = T_{\min} = (50 + 273,15) \text{ K} = 323,15 \text{ K}$$

$$T_3 = T_4 = T_{\max} = (650 + 273,15) \text{ K} = 923,15 \text{ K}$$

Drücke:

$$p_3 = p_{\max} = 10 \text{ bar}$$

$$p_4 = p_3 \cdot \frac{V_3}{V_4} = 10 \text{ bar} \cdot \frac{450 \text{ cm}^3}{1050 \text{ cm}^3} = 4,29 \text{ bar} \quad (\text{isotherm})$$

$$p_1 = p_4 \cdot \frac{T_1}{T_4} = 4,29 \text{ bar} \cdot \frac{323,15 \text{ K}}{923,15 \text{ K}} = 1,5 \text{ bar} \quad (\text{isochor})$$

$$p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1,5 \text{ bar} \cdot \frac{1050 \text{ cm}^3}{450 \text{ cm}^3} = 3,5 \text{ bar} \quad (\text{isotherm})$$

Kontrolle:

$$p_3 = p_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 3,5 \text{ bar} \cdot \frac{923,15 \text{ K}}{323,15 \text{ K}} = 10,0 \text{ bar} \quad (\text{isochor})$$

	1	2	3	4
V in cm³	1050	450	450	1050
p in bar	1,5	3,5	10,0	4,29
T in K	323,15	323,15	923,15	923,15

7.4 $p_3 \cdot V_3 = m \cdot T_3 \cdot R_i \rightarrow$

$$m = \frac{p_3 \cdot V_3}{T_3 \cdot R_i} = \frac{10 \text{ bar} \cdot 450 \text{ cm}^3}{923,15 \text{ K} \cdot 0,297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}$$

$$= \frac{10 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 450 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \cdot \text{kgK}}{923 \text{ K} \cdot 297 \text{ J}}$$

$$= 1,64 \text{ g}$$

$$Q_{12} = -W_{12} = -133,5 \text{ J} \quad (\rightarrow \text{Aufg.})$$

7.5 $Q_{34} = -W_{34} = 381,3 \text{ J} \quad (\rightarrow \text{Aufg.})$

7.6 Der Regenerator speichert ca. 730 J zwischen.

$$Q_{23} = c_v \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot (T_3 - T_2)$$

$$= 0,742 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 1,64 \text{ g} \cdot (923 - 323) \text{ K}$$

$$= 729,7 \text{ J}$$

$$Q_{41} = c_v \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_4)$$

$$= 0,742 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 1,64 \text{ g} \cdot (323 - 923) \text{ K}$$

$$= -729,7 \text{ J}$$

7.7 → Aufg. 7.1

7.8 Mechanische Arbeiten

Masse m (→ Aufg. 7.4)

$$W_{12} = -m \cdot R_i \cdot T_{1/2} \cdot \ln \left[\frac{V_2}{V_1} \right]$$

$$= -1,64 \text{ g} \cdot 0,297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 323 \text{ K} \cdot \ln \left[\frac{450 \text{ cm}^3}{1050 \text{ cm}^3} \right]$$

$$= 133,5 \text{ J}$$

$$W_{34} = -m \cdot R_i \cdot T_{3/4} \cdot \ln \left[\frac{V_4}{V_3} \right]$$

$$= -1,64 \text{ g} \cdot 0,297 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 923 \text{ K} \cdot \ln \left[\frac{1050 \text{ cm}^3}{450 \text{ cm}^3} \right]$$

$$= -381,3 \text{ J}$$

$$W_{\text{Nutz}} = \Sigma W = W_{12} + W_{34} = 133,5 \text{ J} - 381,3 \text{ J} = -247,8 \text{ J}$$

7.9 → Aufg. 7.1

$$7.10 \quad \Sigma Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} + Q_{41}$$

$$= -133,5 \text{ J} + 730,7 \text{ J} - 381,3 \text{ J} - 730,7 \text{ J}$$

$$= 247,8 \text{ J}$$

Wärmebilanz und Nutzarbeit sind betragsmäßig gleich. Die zugeführte Wärmemenge, die nicht als Wärme abgeführt wird, wird in Nutzarbeit umgewandelt.

$$7.11 \quad P = \frac{W}{t} = |W_{\text{Nutz}}| \cdot n = 247,8 \text{ J} \cdot \frac{500}{\text{min}} = 2065 \text{ W}$$

$$7.12 \quad \eta = \frac{|W_{\text{Nutz}}|}{Q_{\text{zu}}} = \frac{247,8 \text{ J}}{381,3 \text{ J}} = 0,65$$

$$7.13 \quad \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{323,15 \text{ K}}{923,15 \text{ K}} = 0,650 = 65,0 \%$$

Man erkennt, dass der Stirling-Prozess theoretisch den Carnot-Wirkungsgrad erreicht und damit thermodynamisch optimal ist.



Alle Werte des Stirling-Motors:

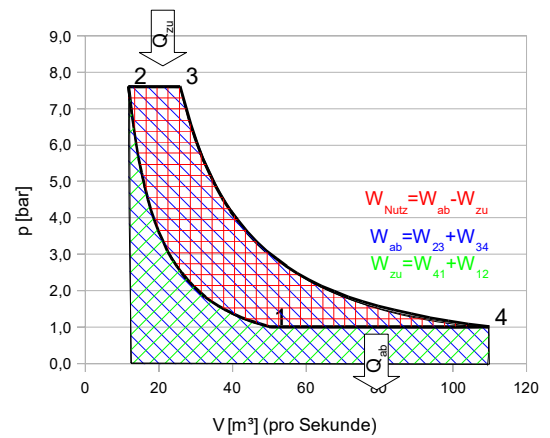
Aufgabe: Ub 07-Stirlingmotor														
Ergebnisse	1E+05	0,00	1E+00	1E+03	1E+06	1E+09	1E+12	1E+15	1E+18	1E+21	1E+24	1E+27	1E+30	1E+33
	bar	dm³	K	°C	J	kJ/kg	W	q _l	q _u	Q	J	kJ/kg	g	kJ/kgK
Typ	p	V	T	θ	W	w _l	W	w _l	w _u	Q	J	kJ/kg	m	kJ/kgK
Zustand														
1	1,50	1,0500	323,2	50,00										
12														
2	3,50	0,4500	323,2	50,00										
23														
3	10,00	0,4500	923,2	650,00										
34														
4	4,29	1,0500	923,2	650,00										
41														
1	1,50	1,0500	323,2	50,00										
Lösungen für Kreisprozesse mit idealen Gasen (p, V-Diagramm)														
© https://ulrich-rapp.de														

8 Gasturbine

8.1

p, V-Diagramm

Gasturbine



8.2 siehe Kap. 8.1

8.3 Alle Berechnungen beziehen sich auf 1 Sekunde¹:

Adiabatische Verdichtung 1 → 2:

$$\left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left[\frac{V_1}{V_2} \right]^{\kappa-1} \rightarrow V_2 = V_1 \cdot \left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{1}{\kappa}} = 50 \text{ m}^3 \cdot \left[\frac{1}{7,6} \right]^{\frac{1}{1,4}} = 11,7 \text{ m}^3$$

$$\left[\frac{T_1}{T_2} \right] = \left[\frac{p_1}{p_2} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left[\frac{p_2}{p_1} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 293 \text{ K} \cdot \left[7,6 \right]^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 523 \text{ K}$$

Isobare Wärmezufuhr 2 → 3:

$p_3 = p_2 = 7,6 \text{ bar}$
 $T_3 = 1150 \text{ K}$ (siehe Aufgabe)

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} \rightarrow V_3 = V_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 11,7 \text{ K} \cdot \frac{1150 \text{ K}}{523 \text{ K}} = 25,8 \text{ m}^3$$

Adiabatische Entspannung 3 → 4

$$\left[\frac{T_3}{T_4} \right] = \left[\frac{p_3}{p_4} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \rightarrow T_4 = T_3 \cdot \left[\frac{p_4}{p_3} \right]^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1150 \text{ K} \cdot \left[\frac{1}{7,6} \right]^{\frac{1,4-1}{1,4}} = 644 \text{ K}$$

$$\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_3}{T_3} \rightarrow V_4 = V_3 \cdot \frac{T_4}{T_3} = 25,8 \text{ m}^3 \cdot \frac{644 \text{ K}}{1150 \text{ K}} = 109,9 \text{ m}^3$$

	1	2	3	4
V in m³	50	11,7	25,8	109,9
p in bar	1	7,6	7,6	1
T in K	293	523	1150	644

¹ Statt mit Masse m in [kg], Volumen V in [m³], Energie, z.B. Arbeit W oder Wärmemenge Q, in [J] oder elektrischer Ladung Q in [C] kann man die entsprechenden Gleichungen auch mit Strömen rechnen, also Größen pro Zeit. In den o.g. Beispielen wären dies Massenstrom ṁ in [kg/s], Volumenstrom V̇ (manchmal auch Q̇) in [m³/s], Leistung P (=Energiestrom) in [J/s] oder elektrischer Strom I in [A = C/s].
Merke 1: Für die meisten Menschen ist es einfacher, einen Zeitraum festzulegen, z.B. t=1s, und darin mit den einfachen Größen m, V, W .. zu rechnen.
Merke 2: Das Formelzeichen Q ist vieldeutig, also Achtung, Verwechslungsgefahr!

8.4 $p_1 \cdot V_1 = m \cdot T_1 \cdot R_i \rightarrow$

$$m = \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1 \cdot R_i} = \frac{1 \text{ bar} \cdot 50 \text{ m}^3}{(273+20) \text{ K} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}$$

$$= \frac{1 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot 50 \text{ m}^3 \cdot \text{kgK}}{293 \text{ K} \cdot 287 \text{ J}}$$

$$= 59,4 \text{ kg}$$

$$Q_{23} = c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_p \cdot m \cdot (T_3 - T_2)$$

$$= 1,004 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 59,4 \text{ kg} \cdot (1150 - 523) \text{ K}$$

$$= 37,4 \text{ MJ}$$

8.5 $Q_{41} = c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_p \cdot m \cdot (T_1 - T_4)$

$$= 1,004 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 59,4 \text{ kg} \cdot (293 - 644) \text{ K}$$

$$= -21,0 \text{ MJ}$$

8.6 siehe Kap. 8.1

8.7 $W_{12} = \frac{-m \cdot R_i}{1 - \kappa} \cdot (T_2 - T_1)$

$$= \frac{-59,4 \text{ kg} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{1 - 1,4} \cdot (523 - 293) \text{ K}$$

$$= 9,8 \text{ MJ}$$

$$W_{23} = -p_2 \cdot (V_3 - V_2)$$

$$= -7,6 \text{ bar} \cdot (25,8 - 11,7) \text{ m}^3 = -10,7 \text{ MJ}$$

$$W_{34} = \frac{-m \cdot R_i}{1 - \kappa} \cdot (T_4 - T_3)$$

$$= \frac{-59,4 \text{ kg} \cdot 0,287 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{1 - 1,4} \cdot (644 - 1150) \text{ K}$$

$$= -21,6 \text{ MJ}$$

$$W_{41} = -p_4 \cdot (V_1 - V_4)$$

$$= -1 \text{ bar} \cdot (50 - 109,9) \text{ m}^3 = 5,99 \text{ MJ}$$

$$W_{\text{Nutz}} = \Sigma W = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$= 9,8 \text{ MJ} - 10,7 \text{ MJ} - 21,6 \text{ MJ} + 5,99 \text{ MJ}$$

$$= -16,5 \text{ MJ}$$

8.8 siehe Kap. 8.1

8.9 $P = \frac{W}{t} = \frac{|W_{\text{Nutz}}|}{t} = \frac{16,5 \text{ MJ}}{1 \text{ s}} = 16,5 \text{ MW}$

Erinnerung: W_{Nutz} wurde pro Sekunde berechnet.

8.10

$$\eta = \frac{|W_{\text{Nutz}}|}{Q_{\text{zu}}} = \frac{16,45 \text{ MJ}}{37,43 \text{ MJ}} = 0,440 = 44,0 \%$$

8.11 Der Carnot-Wirkungsgrad einer Gasturbine

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = 1 - \frac{293,15 \text{ K}}{1150 \text{ K}} = 0,745 = 74,5 \%$$

ist kleiner als der eines Ottomotors ($\eta=83\% \rightarrow$ Aufg. 5.20), da eine Gasturbine mit niedrigeren Temperaturen arbeitet. Ottomotoren vertragen größere Temperaturen, weil die Verbrennung nicht kontinuierlich verläuft und der Brennraum zwischendurch abgekühlt wird. In der Praxis sind die Wirkungsgrade von Ottomotoren nicht höher als von Gasturbinen, u.a. weil Verbrennungsmotoren komplizierter aufgebaut sind und mehr Reibungs- und Strömungsverluste haben als Gasturbinen.

Alle Werte der Gasturbine:

Aufgabe: Ub 08-Gasturbine											
Ergebnisse	1E+05	1,00	1E+05	1E+00	1E+00	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+00	1E+00
	bar	m³	K	°C	kJ/kg	MJ	W	q _L	q _H	kg	kJ/kgK
Zustand	Typ	p	V	T	ϑ	w _L	w _H	q _L	q _H	m	cp
1	a	1,00	50,000	293,2	20,00	165	9,81	0,0	0,00	59,429	1,005
12	a	7,60	11,744	523,3	250,15	-180	-10,69	629,8	37,43	59,429	1,005
23	b	7,60	25,809	1150,0	876,85	-362,9	-21,57	0,0	0,00	59,429	1,005
34	a	1,00	109,880	644,2	371,07	100,8	5,99	-352,8	-20,97	59,429	1,005
41	b	1,00	50,000	293,2	20,00	ΣW _{Nutz}	ΣW _{ab}	Σq _L	ΣQ _{ab}	59,429	1,005
1						-277	-16,45	277,0	16,5		η _{therm}
						ΣW _{ab}	Σq _{ab}	ΣQ _{ab}	ΣQ _{zu}		0,440
						-543	-32,3	-352,8	-21,0		η _{Carnot}
						ΣW _{zu}	Σq _{zu}	ΣQ _{zu}	ΣQ _{zu}		0,745
						266	15,8	629,8	37,4		

Lösungen für Kreisprozesse mit
idealen Gasen (p, V-Diagramm)
© <https://ulrich-rapp.de>



9 Fiktiver Kreisprozess

9.1 Die Zustandsänderung 2→3 verläuft isobar ($p_2 = p_3$)

$$\frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow V_3 = V_2 \cdot \frac{T_3}{T_2} = 25 \text{ cm}^3 \cdot \frac{1500 \text{ K}}{768,1 \text{ K}} = 48,82 \text{ cm}^3$$

Die Zustandsänderung 3→4 verläuft isotherm

(Text)

$$T_4 = T_3 = 1500 \text{ K}$$

$$p_3 \cdot V_3 = p_4 \cdot V_4 \Rightarrow$$

$$p_4 = p_3 \cdot \frac{V_3}{V_4} = 42,78 \text{ bar} \cdot \frac{48,82 \text{ cm}^3}{500 \text{ cm}^3} = 4,18 \text{ bar}$$

oder „rückwärts“ aus Zustand 1

Die Zustandsänderung 4→1 ist isochor ($V_4 = V_1$)

$$\frac{p_4}{T_4} = \frac{p_1}{T_1} \Rightarrow p_4 = p_1 \cdot \frac{T_4}{T_1} = 0,9 \text{ bar} \cdot \frac{1500 \text{ K}}{323,2 \text{ K}} = 4,18 \text{ bar}$$

9.2 Die Art des verwendeten Arbeitsgases fließt über seine Tabellenwerte c_p , c_v , κ oder R_i in die Formeln ein.

- In den Formeln für die isobare Zustandsänderung 2 → 3 kommen diese Tabellenwerte nicht vor, also kommt man hier nicht weiter.
- Ähnlich in isothermer Zustandsänderung 3 → 4. Dort kommt zwar R_i vor, aber es fehlen Werte für die Masse m usw.
- Ähnlich in isochorer Zustandsänderung 4 → 1

Es bleibt also nur die Zustandsänderung 1 → 2, wenn man annimmt, dass sie adiabatisch verläuft. Eine Annahme, weil sonst die Aufgabe nicht lösbar wäre!? Solche Aufgabenstellungen kommen im *Abi Technik und Management* tatsächlich vor...

Für den Rechenweg gibt es mehrere Möglichkeiten über die Gleichung $p \cdot V^\kappa = \text{const.}$, die alle zum Ergebnis $\kappa = 1,29$ führen. Innerhalb der gegebenen Tabellenwerte kommt also nur Kohlendioxid CO_2 in Frage. Kohlenstaubmotor mit reinem Sauerstoff?

Berechnung mit den Drücken p und Volumen V :

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left[\frac{V_2}{V_1}\right]^\kappa \Rightarrow \ln \frac{p_1}{p_2} = \kappa \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln \frac{0,9 \text{ bar}}{42,78 \text{ bar}}}{\ln \frac{25 \text{ cm}^3}{500 \text{ cm}^3}} = 1,29$$

Berechnung mit Temperaturen T und Drücken p

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{1}{1 - \frac{\ln \frac{T_1}{T_2}}{\ln \frac{p_1}{p_2}}} = \frac{1}{1 - \frac{\ln \frac{323,2 \text{ K}}{768,1 \text{ K}}}{\ln \frac{0,9 \text{ bar}}{42,78 \text{ bar}}}} = 1,29$$

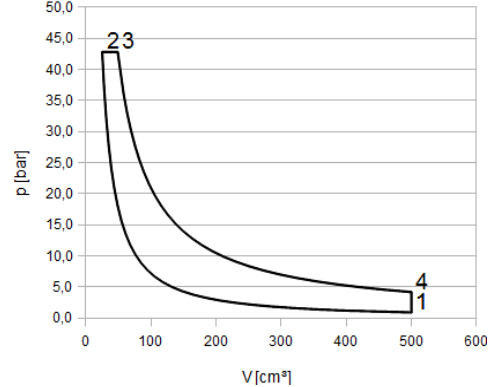
Berechnung mit Volumen V und Temperaturen T

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1} \Rightarrow$$

$$\kappa = \frac{\ln \frac{T_1}{T_2} + 1}{\ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{\ln \frac{323,2 \text{ K}}{768,1 \text{ K}} + 1}{\ln \frac{25 \text{ cm}^3}{500 \text{ cm}^3}} + 1 = 1,29$$

9.3

pV-Diagramm eines fiktiven Kreisprozesses



mit den folgenden Zustandsänderungen:

1 → 2 : adiabatisch

2 → 3 : isobar

3 → 4 : isotherm

4 → 1 : isochor

Begründung siehe Lösung zu Aufgaben 9.1.

Alle Werte des fiktiven Kreisprozesses:

Aufgabe: Ub 09-Fiktiver Kreisprozess														
	1E+05	1E+00	1E+03	1E+00	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03	1E+03
1	bar	cm³	K	°C	g	m	kg	J	kJ/kg	kJ/kgK	kJ/kgK	kJ/kgK	kJ/kgK	kJ/kgK
Typ	p	V	T	ϑ	w ₁	W	Q	q ₁	q ₂	cp	cv	Rs	X	ε
Zustand														
1	0,90	500,00	323,2	50,00						0,844	0,655	0,189	1,289	20,00
12	a				291	214,73	0,0	0,00		0,844	0,655	0,189	1,289	
2		25,00	768,1	494,95			0,737			0,844	0,655	0,189	1,289	
23	b				-138	-101,91	617,7	455,09		0,844	0,655	0,189	1,289	0,51
3		48,82	1500,0	1226,85			0,737			0,844	0,655	0,189	1,289	
34	t				-659,5	-485,88	659,5	485,88		0,844	0,655	0,189	1,289	0,10
4		500,00	1500,0	1226,85			0,737			0,844	0,655	0,189	1,289	
41	c				0,0	0,00	-770,8	-567,95		0,844	0,655	0,189	1,289	1,00
1	0,90	500,00	323,2	50,00						0,844	0,655	0,189	1,289	
					ΣW _{Nutz}	ΣW _{nu}	Σq	ΣQ		η _{therm}				
					-506	-373,05	506,4	373,0		0,396				
					ΣW _{ab}	ΣW _{ab}	Σq _{ab}	ΣQ _{ab}		η _{carnot}				
					-798	-587,8	-770,8	-567,9		0,785				
					ΣW _{zu}	ΣW _{zu}	Σq _{zu}	ΣQ _{zu}						
					291	214,7	1277,2	941,0						

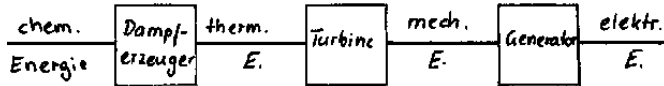
Lösungen für Kreisprozesse mit
idealen Gasen (p,V-Diagramm)
© <https://ulrich-rapp.de>



Kraftwerke

10 Kohlekraftwerk

10.1



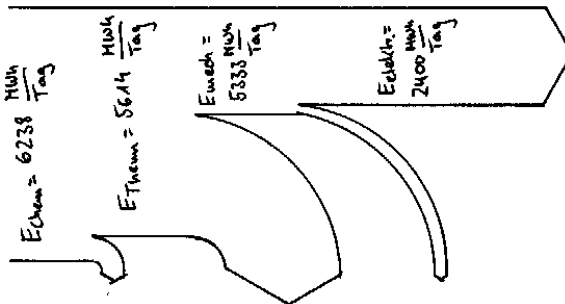
10.2 Durchschnittlicher Energieumsatz pro Tag

$$E_{\text{elektr}} = P \cdot t = 100 \text{ MWh} \cdot 24 \text{ h} = 2400 \text{ MWh}$$

$$E_{\text{mech}} = \frac{E_{\text{elektr}}}{\eta_T} = \frac{2400 \text{ MWh}}{0,95} = 2526 \text{ MWh}$$

$$E_{\text{therm}} = \frac{E_{\text{elektr}}}{\eta_G \cdot \eta_T} = \frac{2400 \text{ MWh}}{0,45 \cdot 0,95} = 5614 \text{ MWh}$$

$$E_{\text{chem}} = \frac{E_{\text{elektr}}}{\eta_H \cdot \eta_G \cdot \eta_T} = \frac{2400 \text{ MWh}}{0,9 \cdot 0,45 \cdot 0,95} = 6238 \text{ MWh}$$



10.3 Gesamtwirkungsgrad

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_H \cdot \eta_G \cdot \eta_T = 0,9 \cdot 0,45 \cdot 0,95 = 0,385$$

10.4 durchschnittlicher Tagesbedarf an Steinkohle (SKE aus der Formelsammlung)

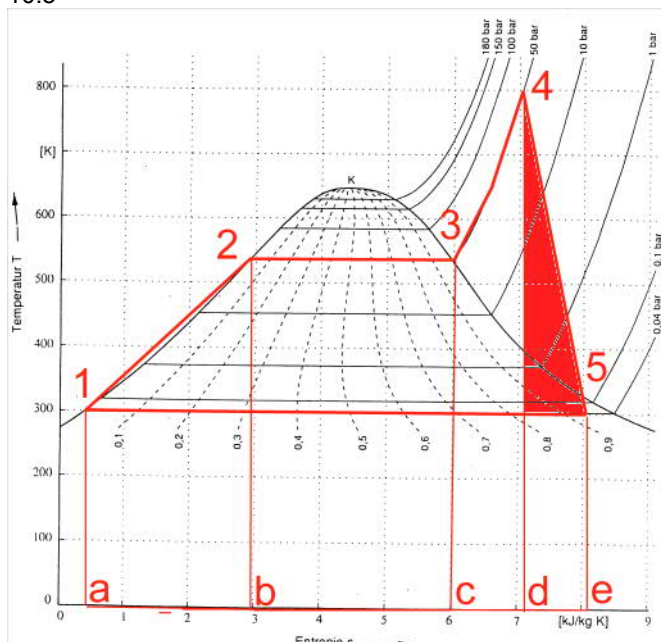
$$m_{\text{Steinkohle}} = \frac{E_{\text{chem}}}{\text{SKE}} = \frac{6238 \text{ MWh}}{2,93 \cdot 10^{10} \frac{\text{J}}{\text{t}}} = \frac{6238 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} \cdot \text{t}}{2,93 \cdot 10^{10} \text{ J}} = 766 \text{ t}$$

oder per Dreisatz:

$$1 \text{ t Steinkohle} \Leftrightarrow 2,93 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

$$? \Leftrightarrow 6238 \text{ MWh}$$

10.5



10.6 Die Wärmemenge wird näherungsweise mit Hilfe der Trapeze berechnet, z.B. q_{12} mit dem Trapez 12ba.

$$q_{12} = (s_2 - s_1) \cdot \frac{T_1 + T_2}{2} = (2,9 - 0,4) \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot \frac{300 + 540}{2} \text{ K} = 1050 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{23} = (s_3 - s_2) \cdot \frac{T_2 + T_3}{2} = (6,0 - 2,9) \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot \frac{540 + 540}{2} \text{ K} = 1674 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{34} = (s_4 - s_3) \cdot \frac{T_3 + T_4}{2} = (7,05 - 6,0) \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot \frac{540 + 800}{2} \text{ K} = 703,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$q_{51} = (s_1 - s_5) \cdot \frac{T_5 + T_1}{2} = (0,4 - 8) \cdot \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot \frac{300 + 300}{2} \text{ K} = -2280 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Die abgegebene Arbeit entspricht der Summe der Wärme, da die Änderung der Enthalpie $\Delta u = 0$ in einem Kreisprozess beträgt.

$$w_{\text{Turbine}} + \sum q = 0 \rightarrow$$

$$w_{\text{Turbine}} = -q_{12} - q_{23} - q_{34} - q_{51} = (-1050 - 1674 - 703,5 + 2280) \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} = -1147,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}$$

Das negative Vorzeichen heißt, dass die Arbeit abgegeben wird.

Das rote Dreieck unterhalb der Turbinenlinie 4 – 5 wird nicht zu den Wärmemengen addiert, weil dort keine Wärme von außen zugeführt wird.

10.7 Thermischer Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{therm}} = \frac{|w_{\text{Turbine}}|}{|q_{\text{zu}}|} = \frac{|-1147,5| \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}}{|1050 + 1674 + 703,5| \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}} = 0,334 = 33,4\%$$

Wirkungsgrad ist immer das Verhältnis zwischen dem Nutzen und dem Aufwand.

Nutzen ist die nutzbare mechanische Energie, aber nicht die ungenutzte Abwärme. Aufwand ist in diesem Fall die zugeführte Wärmeenergie.

Für Physiker ist der Aufwand in jedem Fall die gesamte zugeführte Energie. Da niemals mehr Energie herauskommt als hineingeht, sind physikalische Wirkungsgrade immer $\leq 100\%$.

Ingenieure ua. geben manchmal höhere Wirkungsgrade an, die sich nur auf einen Teil der eingesetzten Energie beziehen¹.

11 Wärmepumpe fehlt

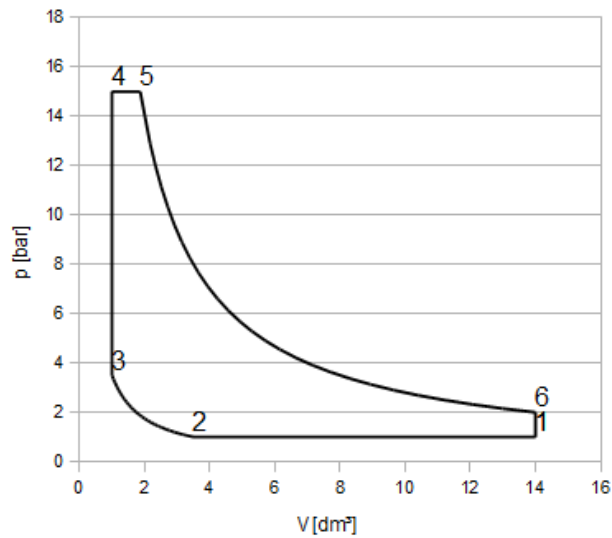
¹ Für Wärmepumpen kalkulieren Ingenieure nur die Energie zum Pumpen, die bezahlt werden muss, aber nicht die kostenlose Wärmeenergie aus der Umgebung. Im Heizwert von Gasen wird die Verdampfungsenthalpie des beim Verbrennen entstehenden Wassers unterschlagen, deshalb erreichen moderne Brennkessel nominelle Wirkungsgrade über 100%. Kraftwerksbetreiber würden gerne die Wirkungsgrade ihrer Wärmekraftwerke nicht auf die ganze Energie, sondern nur auf den Exergie-Anteil beziehen und so billige Kraftwerke mit niedrigen Prozesstemperaturen beschönigen.



12 Kolbendampfmaschine

p,V-Diagramm

Kolbendampfmaschine



V_5 und p_6 sind übertrieben dargestellt

Ergebnisse				
		1,00E+05	1,00E-03	1,00E+00
	1	bar	l	K
Zustand	Typ	p	V	T
1		1,0	14,000	
12	b			
2		1,0	3,500	
23	t			
3		3,5	1,000	
34	c			
4		15,0	1,000	
45	b			
5		15,0	1,120	
56	t			
6		1,2	14,000	
61	c			
1		1,0	14,000	



C Entwürfe

- 1 Tauchgerät gefüllt mit Pressluft bei x Druck und y Temperatur.
 - 1.1 Gewicht
 - 1.2 Steht in der Sonne: Druck
 - 1.3 Wassertemperatur: DruckVolumen bei Abgabedruck abhängig von der Tauchtiefe und Wassertemperatur
- 2 Zustandsänderungen im Reifen eines Autos.
- 3 Eine 10l-Pressluftflasche ist mit 50 bar Luft gefüllt und hat eine Temperatur von 12°C. Pro Atemzug werden 2 l Luft (Normaldruck) entnommen).
 - 3.1 Um wieviel sinken Druck und Temperatur in der Flasche ?
Laut Diagramm ca. 1,5 K (Schleyer: Flaschen, Ventile, Reserveschaltungen)
 - 3.2 Wie viele Atemzüge können bei 25 m Wassertiefe und 10°C entnommen werden ?
Es muss berücksichtigt werden, dass auch der Luftdruck innerhalb der Lunge (Atemzug) dem äußeren Wasserdruck entspricht (2,5 bar).
- 4 Ein Dieselmotor hat ein Verdichtungsverhältnis von $\varepsilon = 20:1$ und einen Verdichtungsdruck von $p = 40$ bar. Nach der Verdichtung werden 15mm³ Dieseldieselkraftstoff mit 1300 bar in den Zylinder eingespritzt. Eine Faustregel besagt, dass sich das Volumen einer Flüssigkeit um 1% je 100 bar Druckerhöhung verringert.
 - 4.1 Durch die Einspritzung wird der Raum für die Luft weiter verringert. Um wie viel erhöht sich dadurch die Temperatur der komprimierten Luft ?
 - 4.2 Zur Verdunstung des Diesels nimmt es Wärme auf. Um wie viel sinkt dadurch die Temperatur der komprimierten Luft ?
 - 4.3 Welche Arbeit muss je Einspritzung aufgebracht werden ?
 - 4.4 Welche Leistung kostet dies, wenn der Motor mit 2500 /min dreht und die Einspritzanlage bei dieser Drehzahl einen Wirkungsgrad von 30% hat ?
- 5 Um wieviel Grad erhöht sich die Temperatur in Ihrem Klassenzimmer je Unterrichtsstunde, wenn jeder Schüler eine Stunde 50 W abgibt und die Wärme komplett im Klassenzimmer bleibt?
- 6 Ein Raum enthält 50 m³ Luft mit einer Lufttemperatur von 30°C.
 - 6.1 Um wie viel sinkt diese Temperatur, wenn in dem Raum beim Trocknen von Wäsche 1kg Wasser verdunstet.
- 7 Ein Fahrradschlauch (Raddurchmesser 28“, Schlauchdurchmesser 2cm) wird isotherm auf 6 bar gepumpt.
 - 7.1 Wie viele Liter Luft (Normaldruck, Normaltemperatur) werden dazu benötigt ?
 - 7.2 Welche Masse Luft enthält der Schlauch ?
 - 7.3 Wie viel Masse kann mit einer Füllung von Helium gespart werden ?
 - 7.4 Welche Energie ist erforderlich, um den Reifen aufzupumpen ?
 - 7.5 Welche Leistung ist beim manuellen Aufpumpen erforderlich, wenn die Handpumpe einen Wirkungsgrad von ... hat und der Reifen in 30 s aufgepumpt werden soll ?
 - 7.6 Wie verändert sich der Bedarf an mechanischer Arbeit zum Aufpumpen, wenn sich der Schlauch elastisch verhält.

Der Energiebedarf steigt, weil anfangs bei kleinerem Volumen ein größerer Druck erforderlich ist.

- 8 Nach einer Panne wird der Mantel ausgetauscht und aus einer handelsüblichen CO₂-Patrone ($V_1 = \dots$; $p_1 = \dots$) adiabatisch aufgefüllt. Danach geschieht der Temperaturausgleich isochor.
 - 8.1 Skizzieren Sie den Verlauf in einem pV-Diagramm für den Schlauch.
 - 8.2 Ermitteln Sie Druck und Temperatur im Zustand 2.
- 9 Der Kühlkreislauf eines Ottomotors wird auf 1, .. bar begrenzt. Bei welcher Temperatur siedet das Kühlwasser, wenn es aus reinem Wasser besteht?
- 10 Stirling als Kältemaschine
- 11 Stirling als Wärmepumpe
- 12 Wärmekraftwerk
 - 12.1 Wie viel Wasser verdunstet im Kühlturm bei .. ?
 - 12.2 Wie viel Wasser würde man benötigen, wenn man dieselbe Wärmemenge ins Flusswasser abführen würde (Wassertemperatur vor dem Kraftwerk: 20°C, max. zulässige Wassertemperatur nach dem Kraftwerk: 25°C)
 - 12.3 Welches Problem kann sich im Sommer ergeben ?

(Dampf-)Prozesse mit realen Fluiden

- 1 Daten des AKW Leibstadt (Prüfen!!)
 - $p = 72$ bar
 - $T_{\text{Kühlwasser}} = 43,5^\circ\text{C}$, wird gekühlt auf 20..25°C
 - $\text{Volumenstrom}_{\text{Kühlwasser}} = 32\text{t/s}$
 - $\text{Volumenstrom}_{\text{Dampf}} = 700\text{kg/s}$
 - $P_{\text{ab}} = 29\text{ MWh p.a.}$
entspricht 75 km² Solarzellen
 - Verbrauch = 74kg Brennstoff p.a.
enthält 2,9 kg U235
- 2 Energiekosten
 - 2.1 Schätzen Sie die Stromkosten, um eine Tonne Stahl in einem Elektrofen einzuschmelzen. (Annahmen: keine Verluste, Strompreis für Industriekunden = 10 Ct/kWh)
 - 2.2 Wie viel CO₂ entsteht dabei?
Annahmen: Der Wirkungsgrad ab Heizwert einschließlich Stromverteilung betrage 25%, der Strom werde in einem Steinkohlekraftwerk produziert, die Kohle bestehe aus reinem Kohlenstoff, der etwa die gleiche Molmasse wie Sauerstoff hat.
- 3 Innere Energie
Ein Stoff „speichert“ Wärme in der kinetischen und potentiellen Energie seiner Teilchen.
 - 3.1 Wie hoch könnte man Wasser mit der Energie heben, die es um 10K erwärmt?



D Lösung Entwürfe

1

1.1 Verdampfungswärme von Wasser

$$Q = r \cdot m_{\text{Wasser}} = 2256 \text{ kJ/kg} \cdot 1 \text{ kg} = 2256 \text{ kJ}$$

Masse der Luft:

$$m_{\text{Luft}} = V \cdot \rho = 50 \text{ m}^3 \cdot 1,293 \text{ kg/m}^3 \approx 65 \text{ kg}$$

Temperaturänderung durch Wärmeentnahme

$$\Delta Q = c_p \cdot m_{\text{Luft}} \cdot \Delta T \rightarrow$$

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{c_p \cdot m_{\text{Luft}}} = \frac{2256 \text{ kJ}}{1,005 \text{ kJ/kgK} \cdot 65 \text{ kg}} \approx 35 \text{ K}$$

Die Raumtemperatur würde theoretisch unter den Gefrierpunkt sinken.

2

3

4

5

6

7 Energiebedarf zu Einschmelzen einer Tonne Stahl

7.1 Erwärmen auf Schmelztemperatur

$$Q_{12} = c_{\text{Stahl}} \cdot m_{\text{Stahl}} \cdot \Delta T$$

$$= 0,50 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot 1500 \text{ K} = 750000 \text{ kJ}$$

Schmelzen

$$Q_{22} = q_{\text{Stahl}} \cdot m_{\text{Stahl}} = 205 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \cdot 1000 \text{ kg} = 205000 \text{ kJ}$$

Energiebedarf gesamt

$$Q_2 = Q_{12} + Q_{23} = 750 \text{ MJ} + 205 \text{ MJ} = 955 \text{ MJ}$$

$$= 955 \text{ MJ} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 265 \text{ kWh}$$

Kosten

$$\text{Preis} = 265 \frac{\text{kWh} \cdot 10 \text{ Ct}}{\text{kWh}} \approx 27 \text{ €}$$

Werte aus [EuroTabM] „Wärmekapazität“, „Schmelzwärme“

7.2 Bei einem Wirkungsgrad von 25% müssen knapp 4 GJ Energie aus Kohle eingesetzt werden, um 955 MJ am Schmelzofen bereitzustellen. Bei einem

Heizwert der Steinkohle von ca. $32 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$ erfordert das ca. 120 kg Steinkohle. Bei der Verbrennung 1 Teil Kohle mit 2 Teilen Sauerstoff ergibt das ca. 360 kg CO_2

Hinweis: Die kleinen Ungenauigkeiten in der Überschlagsrechnung spielen keine Rolle, wenn man vorher nicht wusste, ob dabei 30g oder 30t CO_2 entstehen.

Werte aus [EuroTabM] „Heizwert“

Literaturverzeichnis

[Viebach HP]: Dieter Viebach, Ihr Einstieg in die Stirlingmotortechnologie, , <http://www.ve-ingenieure.de/viebachstirling/index.htm>

[Baucke 1982]: Otto Baucke, Waldemar Herwig, Willy Kreymann, Kraftmaschinen - Pumpen - Verdichter, 1982

[Niederstraßer]: Leopold Niederstraßer, Dampflokomotivdienst, 1940

[Dubbel 20]: Wolfgang Beitz ua., Taschenbuch für den Maschinenbau / Dubbel, 2001

[EuroTabM]: Ulrich Fischer ua., Tabellenbuch Metall,