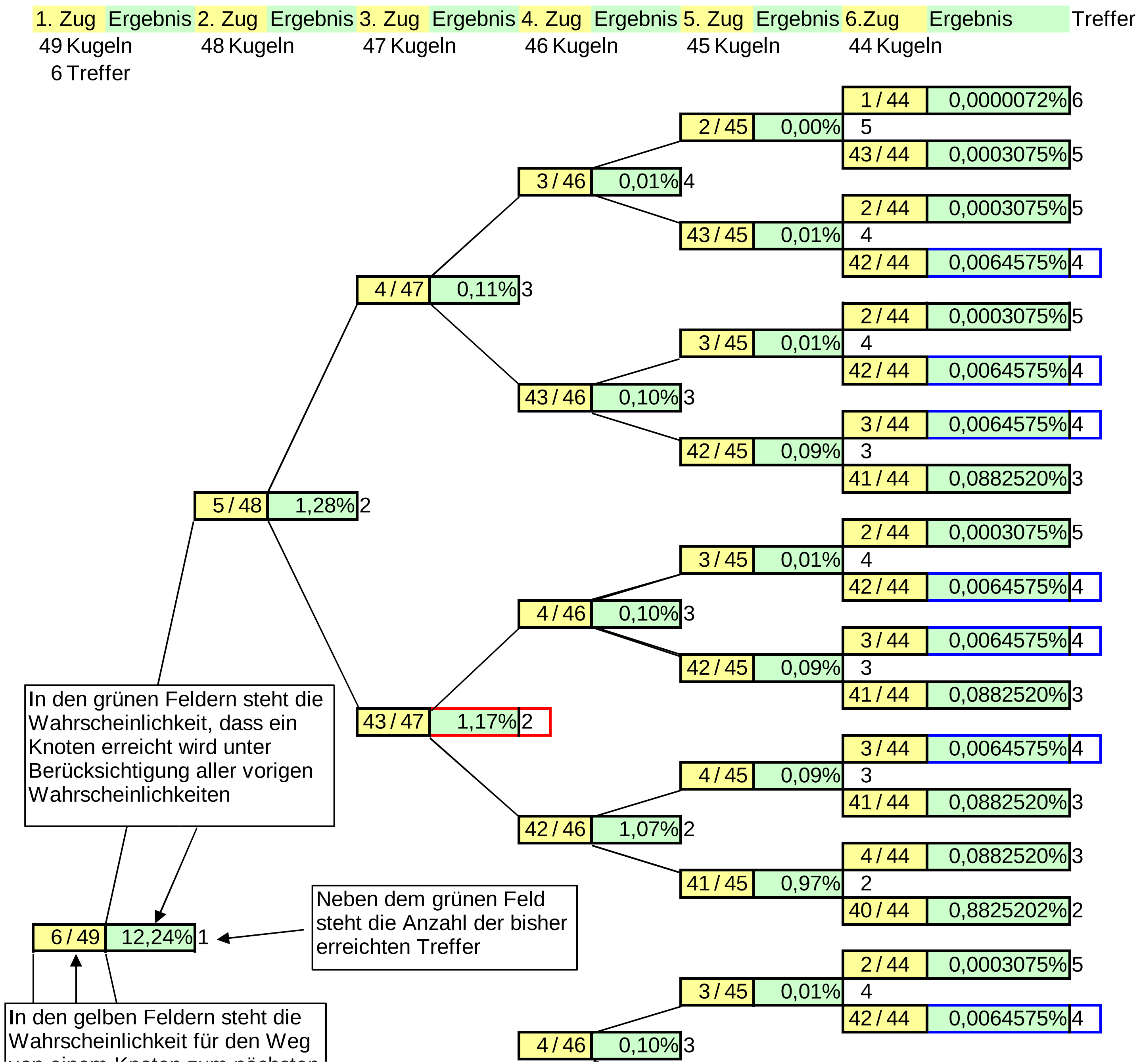
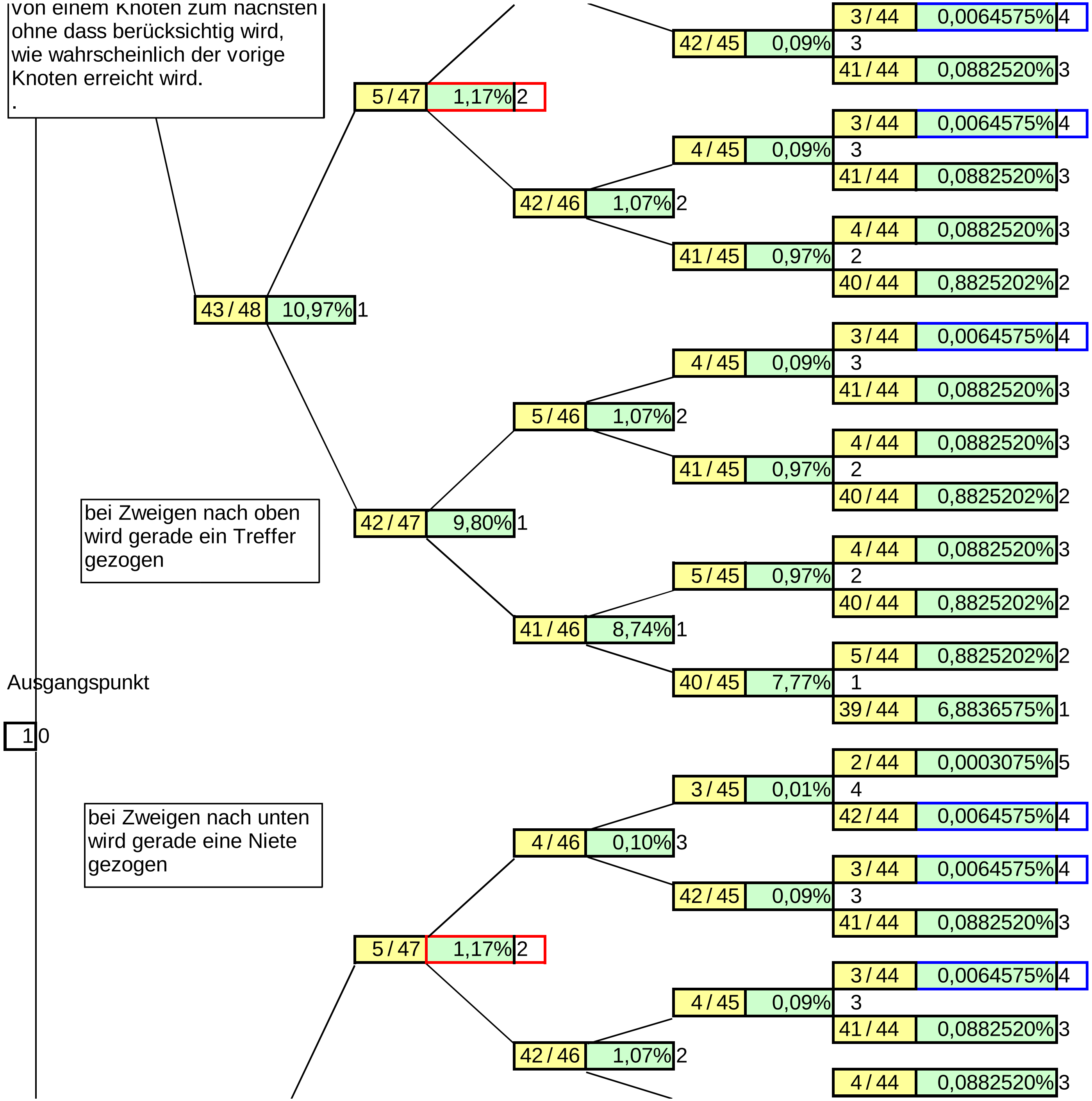
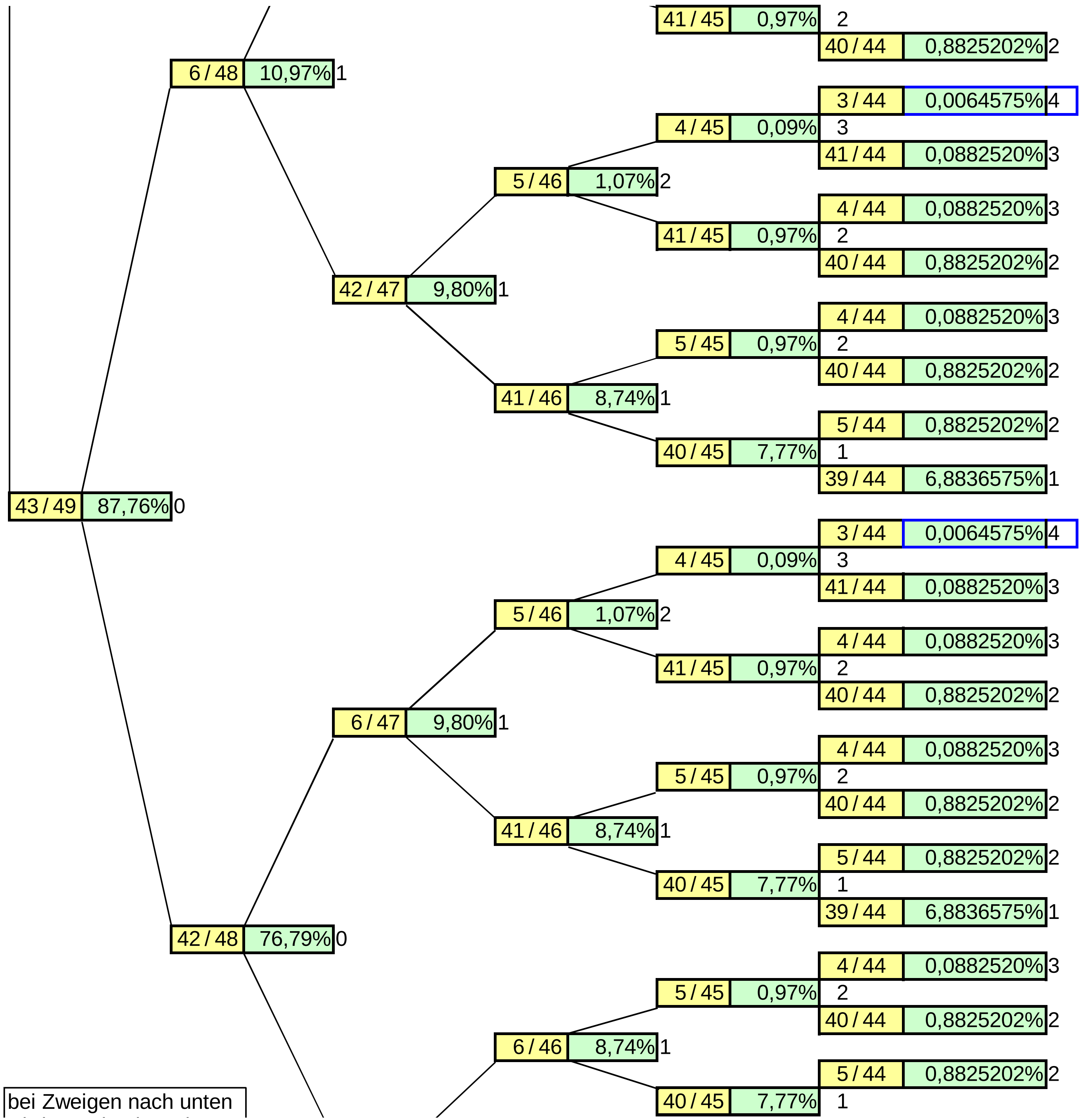
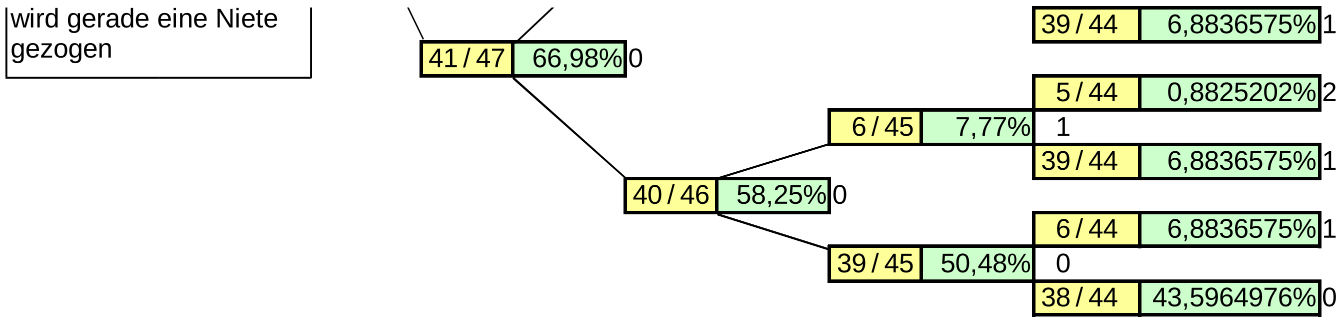
Lotto 6 aus 49: Der vollständige Wahrscheinlichkeitsbaum




von einem Knoten zum nächsten
ohne dass berücksichtig wird,
wie wahrscheinlich der vorige
Knoten erreicht wird.
.
3 / 44 0,0064575% 4
42 / 45 0,09% 3
41 / 44 0,0882520% 3
5 / 47 1,17% 2
3 / 44 0,0064575% 4
4 / 45 0,09% 3
41 / 44 0,0882520% 3
42 / 46 1,07% 2
4 / 44 0,0882520% 3
41 / 45 0,97% 2
40 / 44 0,8825202% 2
43 / 48 10,97% 1
3 / 44 0,0064575% 4
4 / 45 0,09% 3
41 / 44 0,0882520% 3
5 / 46 1,07% 2
4 / 44 0,0882520% 3
41 / 45 0,97% 2
40 / 44 0,8825202% 2
bei Zweigen nach oben
wird gerade ein Treffer
gezogen
42 / 47 9,80% 1
4 / 44 0,0882520% 3
5 / 45 0,97% 2
40 / 44 0,8825202% 2
41 / 46 8,74% 1
5 / 44 0,8825202% 2
Ausgangspunkt
40 / 45 7,77% 1
39 / 44 6,8836575% 1
1 0
2 / 44 0,0003075% 5
3 / 45 0,01% 4
42 / 44 0,0064575% 4
bei Zweigen nach unten
wird gerade eine Niete
gezogen
4 / 46 0,10% 3
3 / 44 0,0064575% 4
42 / 45 0,09% 3
41 / 44 0,0882520% 3
5 / 47 1,17% 2
3 / 44 0,0064575% 4
4 / 45 0,09% 3
41 / 44 0,0882520% 3
42 / 46 1,07% 2
4 / 44 0,0882520% 3



bei Zweigen nach unten



Wenn man die Wahrscheinlichkeit für 4 Richtige ermitteln will, muss man alle Knoten suchen, die nach Abschluss der Ziehung (6 Züge) 4 Richtige enthalten. Sie sind hier in blau eingerahmt. Es handelt sich um 15 Felder, die alle diesselbe Einzelwahrscheinlichkeit von 0,00646% haben. Wenn man alle Einzelwahrscheinlichkeiten addiert, erhält man die Gesamtwahrscheinlichkeit von 4 Richtigen im Lotto 6 aus 49. Sie beträgt ca. 0,097%.

Hier die Werte für alle Trefferzahlen

Treffer	Anzahl der möglichen Wege	Wahrscheinlichkeit für einen Knoten	Gesamtwahrscheinlichkeit
6 Richtige	1	0,0000072%	0,0000072%
5 Richtige	6	0,0003075%	0,0018450%
4 Richtige	15	0,0064575%	0,0968620%
3 Richtige	20	0,0882520%	1,7650404%
2 Richtige	15	0,8825202%	13,2378029%
1 Richtige	6	6,8836575%	41,3019450%
0 Richtige	1	43,5964976%	43,5964976%

Die auffallende Eigenschaft, dass alle Knoten mit 4 Richtigen nach 6 Zügen diesselbe Wahrscheinlichkeit haben, gilt auch für andere ähnliche Knoten. So haben alle 3 Knoten mit 2 Richtigen nach 3 Zügen eine Einzelwahrscheinlichkeit von 1,17%. Wie man leicht selbst nachprüfen kann, ergibt sich dies aus der Tatsache, dass jeder dieser Einzelwahrscheinlichkeiten eines Knotens mit denselben Bruchzahlen in unterschiedlicher Reihenfolge berechnet wird. Für das Beispiel gibt es die folgenden Kombinationen:

$$\frac{6}{49}\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{43}{47}=\frac{6}{49}\cdot\frac{43}{48}\cdot\frac{5}{47}=\frac{43}{49}\cdot\frac{6}{48}\cdot\frac{5}{47}=1{,}17\%$$

Diese Eigenschaft gilt für alle hypergeometrischen und binomialen Verteilungen.

Mit dieser Eigenschaft kann man die Berechnung von Gesamtwahrscheinlichkeiten vereinfachen, weil es dazu genügt, die Einzelwahrscheinlichkeit und die Häufigkeit eines ähnlichen Knotens miteinander zu multiplizieren. Im Beispiel 4 Richtige beim Lotto heißt dies, dass man die Einzelwahrscheinlichkeit von 0,000646% (4 Richtige auf einem ganz bestimmten Weg zu erreichen) mit 15 (Anzahl der möglichen Wege) multipliziert und dann ebenfalls den Wert 0,097% (Gesamtwahrscheinlichkeit für 4 Richtige im Lotto) erhält.

Außerdem nutzt man die Eigenschaft, um den Wahrscheinlichkeitsbaum zu vereinfachen. Man fasst ähnliche Knoten zusammen und erhält ein wesentlich übersichtlicheres Gebilde. Der vereinfachte Wahrscheinlichkeitsbaum für Lotto 6 aus 49 ist unten dargestellt, die obigen Beispiele sind wie oben eingerahmt: 4 Richtige nach 6 Zügen in blau, 2 Richtige nach 3 Zügen in rot.

Allerdings muss man jetzt für jeden Knoten wissen, auf wie vielen Wegen er erreicht werden kann, da die Einzelwahrscheinlichkeit eines Knotens mit der Anzahl der Wege zu ihm multipliziert werden muss. Die Anzahl der Wege zu einem Knoten kann man leicht ermitteln, wenn man die Werte für seine Vorgängerknoten addiert. So kann der rote Knoten (2 Richtige nach 3 Zügen) auf 3 Wegen erreicht werden, weil seine Vorgängerknoten auf 1 Weg (2 Richtige in 2 Zügen) und 2 Wegen (1 Richtige in 2 Zügen) erreicht werden können und die Summe 1+2 =3 ergibt. Zum blauen Knoten (4 Richtige nach 4 Zügen) gibt es 5 + 10 = 15 Wege. Die Anzahl der Wege steht unmittelbar rechts neben den grünen Knoten.