



Einführung in die Grundlagen der Statik zur Vorbereitung auf das Abitur (Technisches Gymnasium) in Baden-Württemberg

Inhaltsverzeichnis

1	Vorbemerkungen.....	2	3.2.7	Lösbarkeit der Aufgabe überprüfen.....	13
1.1	Eigenarten des Lernstoffes Statik und die Auswirkungen auf die Taktik der Vorbereitung ...	2	a	Kriterien für die Lösbarkeit.....	13
1.2	Vorgehensweise im Überblick.....	2	4	Lösungsverfahren wählen.....	14
2	Beispielaufgaben.....	3	4.1	Rechnerische oder zeichnerische Lösung ?.....	14
3	Freimachen : Welche Kräfte wirken?.....	4	4.2	Welches rechnerische Verfahren ?.....	14
3.1	Zweck des Freimachens.....	4	4.3	Welches zeichnerische Verfahren ?.....	14
3.2	Vorgehensweise beim Freimachen.....	4	4.3.1	Voraussetzungen für das 3-Kräfteverfahren.....	14
3.2.1	Wahl einer geeigneten Baugruppe zum Freimachen	4	4.3.2	Voraussetzungen für das 4-Kräfteverfahren (Culmannsches Verfahren).....	14
3.2.2	Lageskizze anfertigen.....	7	4.3.3	Voraussetzungen für das Schlusslinienverfahren.....	15
3.2.3	Kräfte in die Lageskizze eintragen.....	8	4.3.4	Voraussetzungen für das Seileckverfahren.....	15
3.2.4	Wirklinien WL.....	9	5	Rechnerische (analytische) Verfahren.....	16
a	Höhe des Schwerpunktes kann vernachlässigt werden.....	9	5.1	Lageskizze für rechnerische Verfahren.....	16
b	Höhe des Schwerpunktes darf nicht vernachlässigt werden.....	10	5.1.1	unmaßstäblich.....	16
3.2.5	Ermittlung der Wirklinien.....	10	5.1.2	Koordinatensystem.....	16
a	Normalkräfte.....	10	5.1.3	Zerlegung von Kräften.....	17
b	Reibungskräfte.....	10	5.1.4	Unbekannte Richtungen vorläufig annehmen.....	17
c	Einwertiges Lager.....	10	5.2	Rechnerische Verfahren im zentralen Kräftesystem	18
d	Zweiwertiges Lager.....	11	5.3	Rechnerische Verfahren im allgemeinen Kräftesystem.....	18
e	Dreiwertiges Lager.....	11	5.3.1	Wahl des Drehpunktes.....	18
f	Vierwertige Lager.....	11	5.3.2	Gleichgewichtsbedingung $\sum M_i = 0$ ansetzen.....	20
g	Statisch unbestimmt.....	11	5.3.3	Hebelarm.....	20
h	Bremsen.....	11	5.3.4	Kraft steht nicht rechtwinklig zur Bemaßung.....	21
i	Zweigelenkstäbe.....	12	5.3.5	Vorzeichen für ein Drehmoment.....	22
j	Seile, Ketten, Riemen.....	12	5.3.6	Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$	23
k	Runde Körper (Räder, Rollen ..).....	12	5.3.7	Zerlegung von Kräften in ihre Komponenten.....	23
l	Sonstige Hinweise.....	12	5.3.8	Gesamtbeispiele.....	24
3.2.6	Richtungskonvention für Kräfte beim Freimachen	13	5.3.9	Beispiel, die vom vorgeschlagen Lösungsverfahren abweichen.....	26
a	Richtungsregel.....	13	5.3.10	Zeichnerische Lösung.....	26
b	Richtung von Reibungskräften.....	13	5.3.11	Typische Fehler.....	27
c	Richtung für unbekannte Kräfte.....	13	5.4	Geeignetes Bauteil auswählen.....	28
			5.6	Rechnerische Lösung.....	29



1 Vorbemerkungen

Die vorliegende Einführung soll weder eine mathematisch exakte noch umfassende Beschreibung der Statik sein. Sie soll nur helfen, die Statikaufgaben zu lösen, die typischerweise im Abitur an technischen Gymnasien des Landes Baden-Württemberg gestellt werden. Dabei bin ich mir sicher, dass dieses auch dem Verständnis der „ganzen“ Statik dienlich ist, denn die meisten Ingenieure, mit denen ich darüber gesprochen habe, haben im Studium den Zugang zu den Ingenieurwissenschaften nicht über die Vorlesungen (exakt und umfassend), sondern über die Übungen (praktisches Rechnen) gefunden.

Die folgenden Einschränkungen, die für die Statik der Abiturprüfung gelten, sollen deshalb keine Abgrenzung gegenüber der „richtigen“ Statik sein. Wer die Statik auf Abiturniveau begriffen hat, wird sie bei entsprechendem Engagement auch im Studium begreifen.

- Alle Körper werden als starr angenommen, dadurch entfallen Maßveränderungen durch Verformung usw.
- Reibung wird meist vernachlässigt, außer wenn es ausdrücklich gefordert ist
- Es werden nur 2D-Probleme (in der Ebene) betrachtet. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen von 6 auf 3 ($\Sigma F_x=0$; $\Sigma F_y=0$; $\Sigma M=0$; es entfallen: $\Sigma M_x=0$; $\Sigma M_y=0$; $\Sigma F_z=0$).
- Krafteingriffe werden auf Punkte reduziert, Streckenlasten (z.B. Gewichtskraft einer langen Brücke) und Flächenlasten (z.B. Schneelast auf einem Dach) entfallen.

1.1 *Eigenarten des Lernstoffes Statik und die Auswirkungen auf die Taktik der Vorbereitung*

Um die richtige Vorgehensweise bei der Vorbereitung auf Klassenarbeit und Abitur zu finden, sollte man sich über die Eigenarten des Stoffes Statik klar sein.

Wie alle Teilgebiete von Technik M, die im Lehrplan stehen, hängt Statik kaum von den anderen Teilgebieten ab. Das heißt, Statik baut wenig auf vergangenem Stoff auf, und man kann auch dann erfolgreich sein, wenn man bisher in Technik M nichts auf die Beine gebracht hat. Voraussetzung sind lediglich mathematische Grundkenntnisse: einfache Winkelfunktionen und das Aufstellen und Auflösen zwar langer, aber einfacher Gleichungen mit oder ohne CAS-Rechner. Das einzig Ungewohnte für den normalen Schüler ist das Rechnen mit Einheiten, das ich konsequent verlange.

Beim Lösen statischer Aufgaben liegt die größte Hürde zu Beginn einer Aufgabe, nämlich beim Freimachen. Das Freimachen ist die Geistesleistung, die eigentliche Lösung ist dann nur noch das sture Abarbeiten eines Algorithmus (1. Tu dies; 2. Tu das ...), was zwar Arbeit ist, aber jeder lernen kann. Das zeigt auch die Erfahrung bei der Korrektur. Wer beim Freimachen Fehler macht, lässt viele Punkte; wer beim Freimachen erfolgreich ist, schafft die Lösung dann meistens auch.

Für die Vorbereitung heißt das, dass man nicht den Anfang des Unterrichtes ungestraft verpennen kann.

Statik ist kein Lernstoff, sondern ein Übungsstoff – wie alle Aufgaben, die mit Hilfe der Mathematik gelöst werden. Während man einen Stoff wie Werkstoffkunde 2 Tage vor der Klassenarbeit erstmalig durchpauken und dann noch ein paar Punkte abstauben kann, ist dies in Statik nicht möglich. Das ist ähnlich wie beim Führerschein: Für die theoretische Prüfung genügt es, den Ordner durchzulesen, aber für die praktische Prüfung reicht es nicht, wenn man die Bedienungsanleitung des Fahrzeugs und die Straßenverkehrsordnung liest, sondern man muss Fahren üben – und zwar lange vor der Prüfung.

1.2 *Vorgehensweise im Überblick*

Bei allen Statikaufgaben geht man in 3 Schritten vor:

- Freimachen
- Lösungsverfahren wählen
- Lösen

Diese Schritte werden im Folgenden beschrieben.

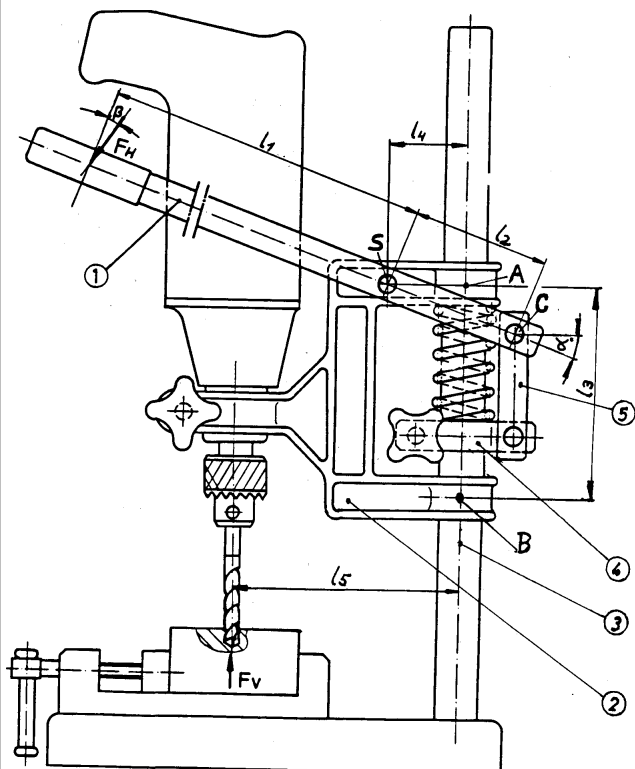


2 Beispielaufgaben

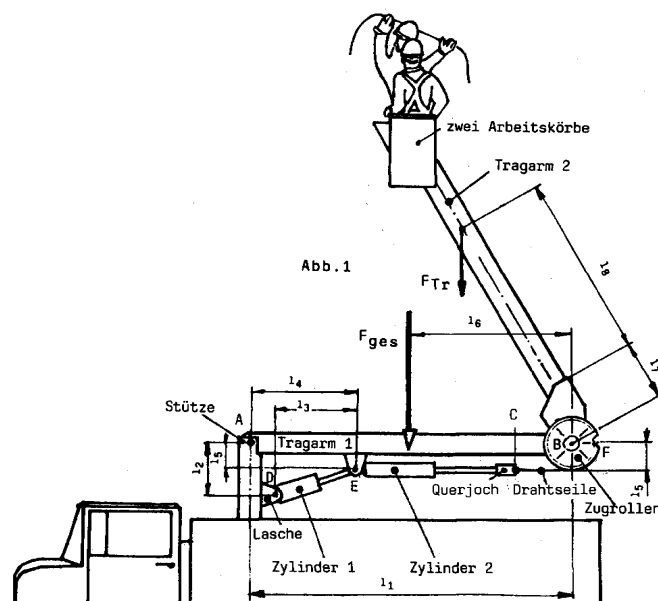
Die Erklärungen auf den nächsten Seiten werden anhand der folgenden Beispiele erläutert. Die Sammlung dieser und weiterer Beispiele mit Lösungen finden Sie unter <http://www.ulrich-rapp.de/stoff/statik>.

Die Beispiele stammen aus ehemaligen Abitur-Prüfungen im Fach TM an technischen Gymnasien des Landes Baden-Württemberg. Diese und weitere Aufgaben finden Sie unter <http://www.ulrich-rapp.de/klassen/tg/abi>.

- 1 HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer
1a Gesucht: F_S , F_C
1b Gegeben: $F_S = 450 \text{ N}$; Gesucht: F_A ; F_B ; F_V
 $l_1 = 300 \text{ mm}$; $l_2 = 90 \text{ mm}$; $l_3 = 140 \text{ mm}$; $l_4 = 50 \text{ mm}$;
 $l_5 = 150 \text{ mm}$; $\alpha = 20^\circ$; $\beta = 10^\circ$; $F_H = 100 \text{ N}$; $F_F = 80 \text{ N}$



- 2 HP 93/94-2 Zweigelenkarm
Gesucht: F_A , F_E



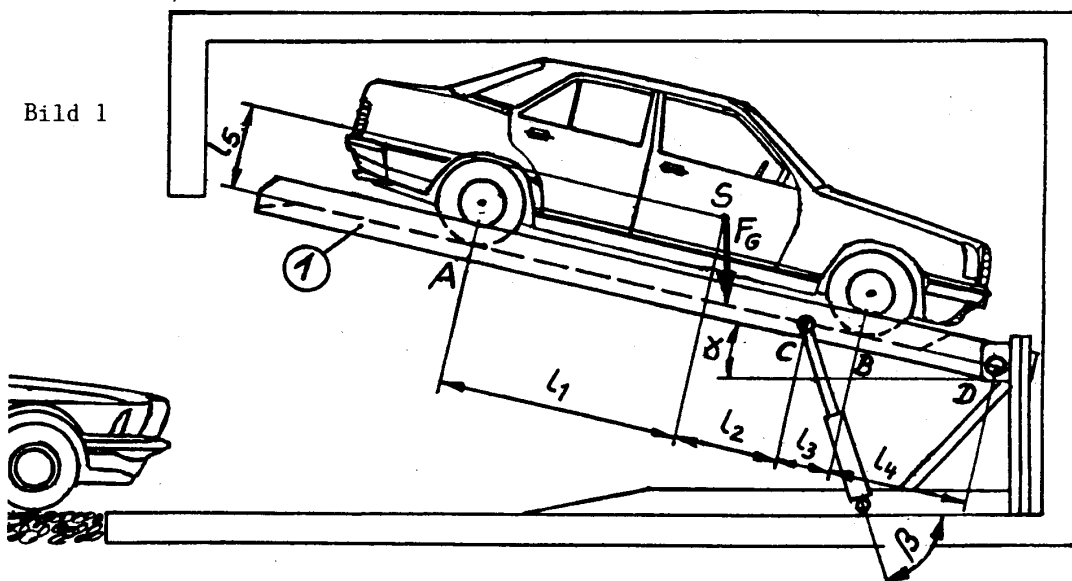
Der Zweigelenkarm (Tragarm 1, Tragarm 2, Arbeitskörbe) hat die Gesamtgewichtskraft F_{ges} . Tragarm 2 mit den beiden Körben hat die Gewichtskraft F_{Tr} .

$l_1 = 3,6 \text{ m}$; $l_2 = 0,6 \text{ m}$; $l_3 = 0,9 \text{ m}$; $l_4 = 1,2 \text{ m}$; $F_{\text{Tr}} = 3 \text{ kN}$
 $l_5 = 0,3 \text{ m}$; $l_6 = 1,8 \text{ m}$; $l_7 = 1 \text{ m}$; $l_8 = 2 \text{ m}$; $F_{\text{ges}} = 6 \text{ kN}$;

- 3 HP 91/92-1 Parklift
Ges: F_A , F_B (Hinterradbremse !)
Ges: F_C , F_D

$l_1 = 1600 \text{ mm}$
 $l_2 = 850 \text{ mm}$
 $l_3 = 400 \text{ mm}$
 $l_4 = 1200 \text{ mm}$
 $l_5 = 600 \text{ mm}$
 $\alpha = 17^\circ$
 $\beta = 74^\circ$ $m_G = 1300 \text{ kg}$

Bild 1





3 Freimachen : Welche Kräfte wirken?

3.1 Zweck des Freimachens

Bevor man Kräfte berechnen kann, muss man ein System von Kräften finden, für die die Gleichgewichtsbedingungen der Statik gelten. Das ist der Fall, wenn man alle Kräfte betrachtet, die von außen auf eine Baugruppe wirken. Freimachen ist die Methode, alle Kräfte zu ermitteln, die auf eine Baugruppe wirken. Ohne Freimachen kann man keine Statikaufgaben lösen.

Freimachen heißt, dass man von der gewählten Baugruppe alle angrenzenden Baugruppen entfernt und durch Kräfte ersetzt. Mit Ausnahme der Schwerkraft wirken nur dort Kräfte, wo es Kontaktflächen zwischen der gewählten Baugruppe und dem Rest der Welt gibt, z.B. zwischen Pkw und Straße oder zwischen Handhebel und Hand.

Im allgemeinen Fall sind Kräfte an Materie gebunden. Für die Statik genügt es, wenn man von Baugruppen spricht, wobei die Baugruppen auch aus mehreren Baugruppen kombiniert sein können (z.B. Pkw mit Hebebühne oder Tragarm 1 mit Tragarm 2 und Arbeitskörbe) oder aus einzelnen Bauteilen bestehen können (z.B. Handhebel). Man möge mir verzeihen, dass ich auch die Erde und Personen als Baugruppen bezeichne. Jede andere Formulierung würde nur die Beschreibung verkomplizieren.

In der „richtigen“ Statik wirken auch (Dreh-)Momente auf die Baugruppen, aber im Abi ist dies nicht üblich.

Innerhalb der Aufgabe treten natürlich (Dreh-)Momente auf, aber beim Freimachen kann man sich auf Kräfte beschränken.

Seit Newtons 3. Axiom *actio = reactio* ist bekannt, dass Kräfte immer in Paaren auftreten, die sich gegenseitig aufheben. Durch das Freimachen werden die Nullsummen-Kräftepaare aufgetrennt und damit der Berechnung zugänglich gemacht. Es werden die Kräftepaare aufgetrennt, die zwischen der gewählten Baugruppe und dem Rest der Welt wirken, Kräftepaare innerhalb oder außerhalb der Baugruppe müssen und dürfen nicht berücksichtigt werden, weil sie sich aufheben.

3.2 Vorgehensweise beim Freimachen

Durch Freimachen ermittelt man nicht alle Kräfte innerhalb der gestellten Aufgabe, sondern nur die Kräfte, die auf eine ausgewählte Baugruppe wirken. Ihre erste Tätigkeit zur Lösung der Aufgabe ist es also, eine geeignete Baugruppe zu finden, mit der man die gesuchten Kräfte erfassen kann.

Alle Kräfte zu kennen, die innerhalb einer Aufgabe wirken, wäre gar nicht sinnvoll. So ist es nicht nötig, die Kräfte zwischen Motor und Karosserie eines Pkws zu kennen, wenn man Aufstandskräfte (= Kräfte zwischen Rädern und Straße) ermitteln soll.

3.2.1 Wahl einer geeigneten Baugruppe zum Freimachen

Mit der Wahl einer Baugruppe erhält man einige Kräfte, mit denen man rechnen kann. Eine Baugruppe ist dann geeignet, wenn man mit den erhaltenen Kräften die Aufgabe lösen kann. Das heißt:

Eine Baugruppe ist geeignet, wenn auf sie wirken:

- die gesuchten Kräfte (deshalb findet man die Baugruppe immer neben den gesuchten Kräften !)
- mindestens eine bekannte Kraft (sonst gibt es keine Lösung)
- max. 3 unbekannte Größen (Beträge und / oder Richtungen), weil man mit den 3 Gleichgewichtsbedingungen nur 3 Unbekannte lösen kann. Im zentralen Kräftesystem kann man sogar nur 2 unbekannte Größen lösen, weil alle Kräfte durch einen Punkt gehen, keine Hebelarme und keine Momente vorkommen und deshalb die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ entfällt. Im allgemeinen Kräftesystem kann man auch nur 2 unbekannte Größen lösen, wenn alle Kräfte parallel wirken, weil dann entweder eine der Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ entfällt oder die beiden Gleichungen nicht unabhängig sind.



Beispiel 1a Bohrmaschinenständer; gesucht sind F_c und F_s

Ausgehend von den Angriffspunkten der gesuchten Kräfte kommt der Handhebel (Pos. 1) zum Freimachen in Frage. Eine andere Möglichkeit ist eine Kombination der Bauteile Bohrmaschinenführung (Pos. 2) und Lasche (Pos. 5) und anderer Teile, aber diese Möglichkeit sieht komplizierter aus.

Deshalb mache ich zunächst den Handhebel frei. Auf den Handhebel wirken die bekannte Handkraft und die gesuchten Größen F_c und F_s , andere Kontaktstellen gibt es nicht. Da es sich nur um bekannte oder gesuchte Größen handelt, ist der Handhebel geeignet, die Aufgabe zu lösen.

Um die Richtungen der Kräfte brauchen wir uns im Moment noch nicht zu kümmern.

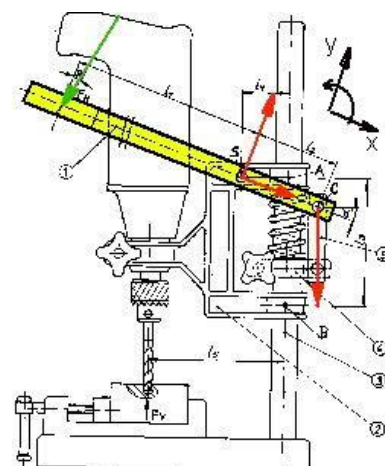


Abb. 1

Beispiel 1b Bohrmaschinenständer; gesucht sind F_A , F_B und F_V

F_A und F_B wirken zwischen der Bohrmaschinenführung (Pos. 2) und der Führungssäule (Pos. 3), während F_V zwischen dem Bohrer und dem Werkstück wirkt. Es bieten sich also 2 Baugruppen zum Freimachen an:

- 1) Baugruppe Führungssäule und Werkstück mit den Verbindungsteilen Schraubstock und Fußplatte. Mit dieser Baugruppe kommen zusätzliche unbekannte Kräfte ins Spiel, nämlich die Kraft zwischen Fußplatte und Boden und die Kraft zwischen Führungssäule (3) und Klemmstück (4). Das sind zu viele unbekannte Größen, die nicht lösbar sind, deshalb taugt dieser Ansatz nichts.

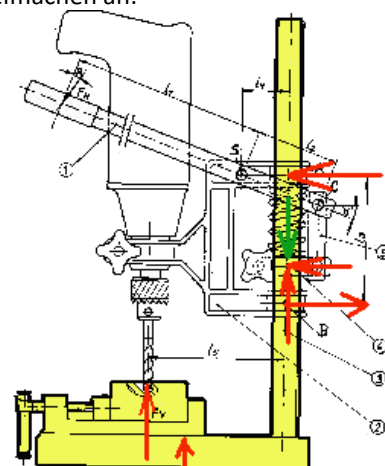


Abb. 2

- 2) Baugruppe Bohrmaschinenführung (2x an der Säule), Bohrer und Bohrmaschine: Hier wirken die drei gesuchten Kräfte, dazu zwei bekannte Kräfte. Diese Baugruppe ist geeignet, um die Aufgabe zu lösen.

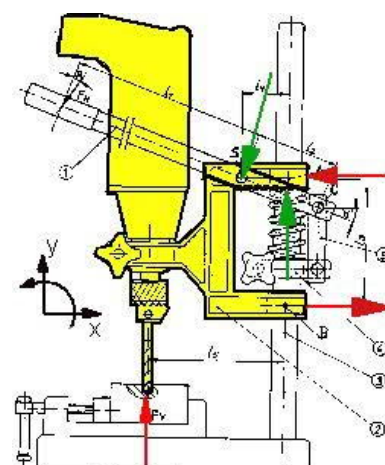


Abb. 3



Beispiel 2a Zweigelenkarm; gesucht sind F_A und F_E

Ausgehend von den Punkten A und E, an denen die gesuchten Kräfte angreifen, sind 3 Baugruppen zum Freimachen denkbar.

- 1) Baugruppe Fahrzeug oder Teile des Fahrzeuges unterhalb der Punkte A und B:
Unabhängig davon, welchen Teil des Fahrzeuges man freimacht, bekommt man immer zusätzliche unbekannte Kräfte an der unteren Begrenzung der Baugruppe. Außerdem hat man keine bekannte Kraft, deshalb ist diese Baugruppe ungeeignet zur Lösung dieser Aufgabe.

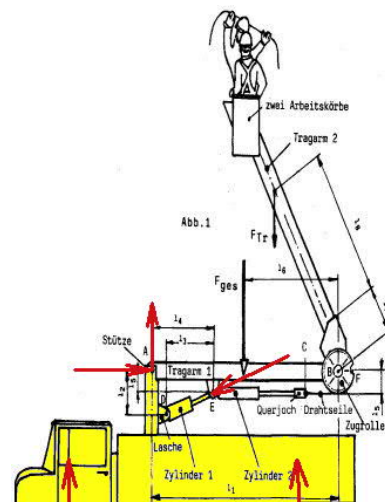


Abb. 4

- 2) Baugruppe Tragarm 1: Wenn man nur den Tragarm 1 freimacht, muss man irgendwo die Verbindung zum Tragarm 2 durchschneiden, z.B. im Gelenk F. Dort bekommt man neue unbekannte Kräfte, die diesen Ansatz unlösbar machen. Zudem hat man keine bekannte Kraft, weil für den Tragarm 1 keine Gewichtskraft angegeben ist.

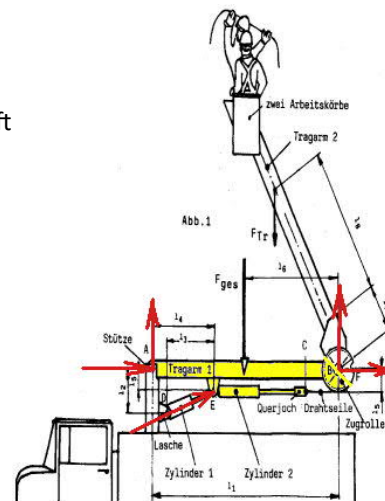


Abb. 5

- 3) Baugruppe Tragarm 1 und Tragarm 2 mit Arbeitskörben und Arbeitern: Dieser Ansatz vermeidet zusätzliche unbekannte Kräfte in durchgeschnittenen Baugruppen und ist lösbar.

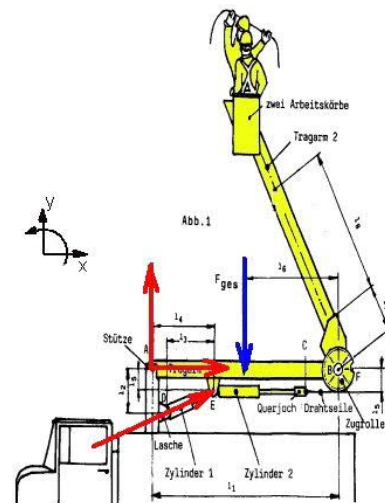


Abb. 6



Beispiel 3a Parklift; gesucht sind F_A und F_B

Ausgehend von den Aufstandspunkten A und B, an denen die gesuchten Kräfte angreifen, kann man das Fahrzeug freimachen oder Teile des Parkliftes. Den Parklift kann man nach den bisherigen Erfahrungen ausschließen, weil man sich an der Schnittstelle zur Erde zu viele neue unbekannte Kräfte einfängt und außerdem keine bekannten Kräfte hat.

Deshalb macht man nur das Fahrzeug frei und hat damit den lösbaren Ansatz gefunden.

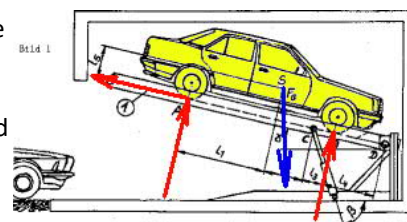


Abb. 7

Beispiel 3b Parklift; gesucht sind F_C und F_D

Wenn man von den Kraftangriffspunkten C und D ausgeht, kann man das Freimachen nach unten wieder ausschließen. Es stellt sich also die Frage, ob man nur die Plattform oder die Plattform mit Fahrzeug freimacht.

- 1) Baugruppe Plattform mit Fahrzeug: Man hat 3 unbekannte Größen der gesuchten Kräfte F_C und F_D nebst der bekannten Schwerkraft, sodass dieser Ansatz lösbar ist.

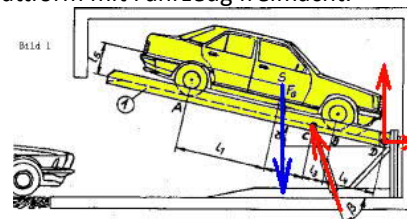


Abb. 8

- 2) Baugruppe Plattform: Man hat wiederum die gesuchten Kräfte F_C und F_D und zusätzlich die Aufstandskräfte F_A und F_B . Wenn man davon ausgeht, dass die Aufstandskräfte in Beispiel 3a ermittelt wurden und damit bekannt sind, ist auch dieser Ansatz lösbar, aber weniger elegant als im ersten Ansatz.

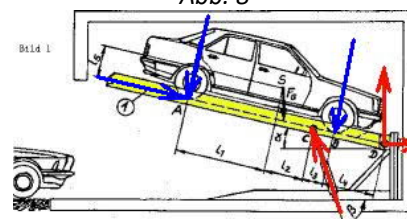


Abb. 9

Sonstige Hinweise

Abi-Aufgaben wurden bisher immer so gestellt, dass sie mit dem Freischneiden einer Baugruppe gelöst werden konnten. Außerdem ist meistens nach allen Kräften gefragt, die auf diese Baugruppe wirken und unbekannt sind. Nur in wenigen Aufgaben muss man Kräfte mitnehmen, die weder bekannt noch gesucht sind.

Im Studium oder für Statiker gibt es natürlich Probleme, bei denen man mehr Kräfte ermitteln muss, als es mit dem Freimachen einer einzigen Baugruppe möglich ist. Beispiel für solche Probleme sind die Kräfte in den Stäben einer Eisenbahnbrücke. Dann muss man mehrere Baugruppen nacheinander freimachen und berechnen.

Wenn Sie nicht sicher sind, ob Sie eine geeignete Baugruppe gefunden haben, sollten Sie dennoch die folgenden Schritte konsequent durchführen und am Ende anhand der Checkliste überprüfen, ob die Aufgabe mit gewählten Baugruppe lösbar ist. Wenn sie nicht lösbar ist, müssen Sie eine andere Baugruppe wählen.

3.2.2 Lageskizze anfertigen

Beginnen Sie mit einer Lageskizze, und machen Sie deutlich, welche Baugruppe freigemacht ist.

Eine Lageskizze ist eine Skizze des Lageplanes, die an keine Form gebunden ist. Für meine Schüler ist die Lageskizze zwar nicht Pflicht, sie dürfen auch sofort den Lageplan zeichnen, aber ich empfehle sie die Lageskizze dringend, weil

- Die Lageskizze soll ein Auszug des Wesentlichen aus der Aufgabe sein. Sie dient also der Erfassung der Aufgabenstellung und kostet kaum zusätzliche Zeit.
- Die Lageskizze zeigt, ob der Schüler die Aufgabe richtig erfasst und freigemacht hat. Da dies bei Statikaufgaben ein wichtiger Teil der Leistung ist, vergebe ich für die richtige und lesbare Lageskizze ca. 1/4 bis 1/3 der Punktzahl der Aufgabe.
- Wenn man sofort mit dem Lageplan beginnt, muss man gleichzeitig die Aufgabe erfassen und sich mit den Formalien eines Lageplanes herumschlagen. Man jongliert also mit 2 Bällen, und das in einer Klausur, wo noch Stress hinzu kommt. Das führt die geistige Kapazität vieler Schüler in die Bereiche, in denen die Fehlerkurve steil ansteigt.
- Aber auch Schüler, die dieser Doppelbelastung gewachsen sind, strengen ihr Hirn mehr als nötig an. Das muss man im Zusammenhang einer Abi-Klausur von 4,5 Zeitstunden (!) sehen, denn niemand kann über diese Zeit voll

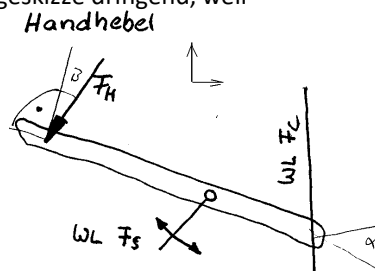


Abb. 10: Beispiel für eine Lageplanskizze aus Aufgabe a



konzentriert arbeiten. Deshalb empfehle ich grundsätzlich, lieber zwei kleine als einen großen Schritt zu machen, weil man in einer Klausur jede Gelegenheit nutzen sollte, die Taktrate und damit die Betriebstemperatur seiner grauen Zentraleinheit zu drosseln.

- Für die rechnerische Lösung genügt die Lageskizze völlig, ein Lageplan ist gar nicht erforderlich.

Die Bilder zeigen Beispiele für Lageskizzen aus Aufgabe 1a.

Dagegen ist die Angabe, welche Baugruppe bzw. welche Baugruppen freigemacht wurden, für meine Schüler Pflicht.

Wenn sie es nicht tun, gibt es Punktabzug. Die formale Begründung lautet, dass der Lösungsweg nicht übersichtlich dargestellt ist. Der wirkliche Grund ist, dass manche Schüler gar nicht überlegen, welche Baugruppe sie freimachen und einfach alle Kräfte eintragen, die sie in der Aufgabe finden.

Dies führt erstens zu Fehlern und macht zweitens die Korrektur zur Qual.

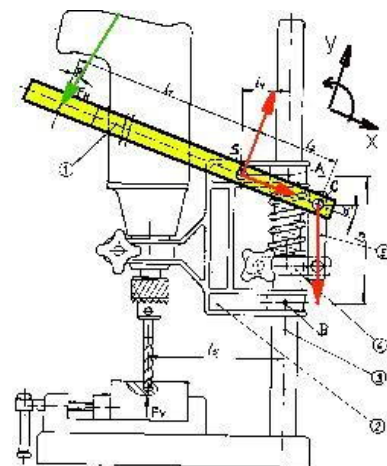


Abb. 11: Beispiel für eine Lageplanskizze aus Aufgabe 1a

3.2.3 Kräfte in die Lageskizze eintragen

Tragen Sie alle Kräfte, die auf die freigemachte Baugruppe wirken, an der richtigen Stelle in die Lageskizze ein.

Alle Kräfte (außer Schwerkraften) werden durch Kontaktflächen zwischen Baugruppen übertragen. Deshalb brauchen Sie nur eine Linie um die gewählte Baugruppe zu zeichnen und zu prüfen, wo es Berührungen zur Umwelt gibt. Jedes Bauteil oder jede Kontaktstelle, die von der Linie überquert wird, steht für eine Kraft.

Beispiele sind bereits im Abschnitt I „geeignete Baugruppe wählen“ aufgeführt.

Achtung, Punktverlust: Beim Suchen nach den wirkenden Kräften gehen die meisten Punkte verloren, denn wenn Kräfte falsch bestimmt sind, kann die Lösung nicht mehr richtig werden. Suchen Sie deshalb die Grenzen des freigemachten Bauteiles systematisch und konsequent nach Kontaktstellen zu anderen Baugruppen ab, und tragen Sie an jeder Kontaktstelle eine Kraft ein.

Nur zu oft werden Schüler vom Wunschdenken geleitet: „Da muss doch eine Kraft wirken, sonst ..“ oder „Ich weiß gar nicht, wie man diese Kraft einrechnet ..“. Aber Statik ist kein Wunschkonzert, und wenn an der nötigen Stelle eine materielle Stütze fehlt, bricht eine Konstruktion zusammen. Immerhin haben TG-Schüler die Gewissheit, dass Abi-Aufgaben nicht zusammenbrechen, aber das ist ein Entgegenkommen, dass für Studenten und Statiker nicht gilt.

Sonstige Hinweise: Natürlich gibt es neben Schwerkraften auch Fliehkräfte, magnetische Kräfte u.a., die ohne Kontaktfläche übertragen werden, aber diese sind bisher in Abi-Aufgaben nicht dran gekommen oder wurden ausdrücklich genannt.

Kräfte innerhalb der freigemachten Baugruppe werden nicht berücksichtigt, weil es sich immer um Kräftepaare handelt.

Statik TX.odt, 13.02.19, Seite 9/30



b Höhe des Schwerpunktes darf nicht vernachlässigt werden

Bei schiefen Ebenen darf die Höhe nicht vernachlässigt werden, weil sich mit der Höhe des Schwerpunktes die WL auch seitlich verschiebt. Je höher der Schwerpunkt liegt, desto weiter wandert die WL in Richtung des talseitig liegenden Rades.

Wenn der Schwerpunkt so hoch würde, dass die WL unterhalb des talseitigen Rades verlief, kippte das Fahrzeug um. Da Ähnliches auch bei der Kurvenfahrt gilt, versucht man bei Fahrzeugen den Schwerpunkt so tief wie möglich zu legen.

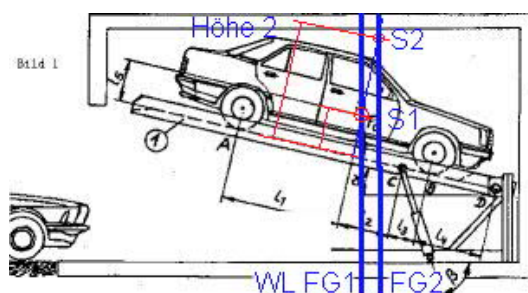


Abb. 15:

3.2.5 Ermittlung der Wirklinien

Die Wirklinie einer Kraft wird durch die Kontaktfläche zwischen zwei Baugruppen vorgegeben:

a Normalkräfte

Normalkräfte wirken immer senkrecht zur Berührfläche der beiden Baugruppen. Normalkräfte müssen immer berücksichtigt werden.

b Reibungskräfte

Reibungskräfte wirken parallel zur Berührfläche entgegen der Bewegungsrichtung, bzw. entgegen der antreibenden Kraft. Reibung muss nur berücksichtigt werden, wenn sie ausdrücklich gefordert ist. Die Forderung ist manchmal verklausuliert, z.B. „die Hinterachse ist gebremst“.

Beispiel 3a mit freigemachtem Pkw

Die WL der Schwerkraft verläuft senkrecht zum Erdmittelpunkt durch den Schwerpunkt.

Die WL der Aufstandskräfte zwischen einem Rad und der Plattform verlaufen senkrecht zur Plattform durch den Berührungspunkt zwischen Rad und Boden.

Die WL der Bremskraft an der Hinterachse verläuft parallel zur Plattform.

Die WL an der Hinterachse kann man anders interpretieren, wenn nach der Gesamtlast am Hinterrad gefragt ist und die Trennung in Aufstandskraft und Reibungskraft nicht gesucht ist. In diesem Fall ist die WL der Hinterradkraft unbekannt. Genauer gesagt ist von der WL nur ein Punkt bekannt, nämlich der Angriffspunkt der Kraft; dieser Punkt ist deshalb bei einigen zeichnerischen Verfahren wichtig. Das Hinterrad ist ein zweiwertiges Lager, weil es Kräfte in 2 Hauptrichtungen überträgt.

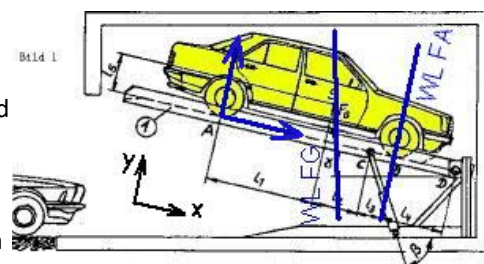


Abb. 16:

Zur Markierung einer WL ohne bekannte Richtung gibt es mehrere Möglichkeiten:

Oben ist die unbekannte Kraft in x- und y-Komponenten zerlegt, dies ist günstig für rechnerische Lösungen.

Unten ist durch den Doppelpfeil angedeutet, dass die Richtung der WL nicht bekannt ist, diese Variante kann bei zeichnerischen Lösungen angewandt werden.

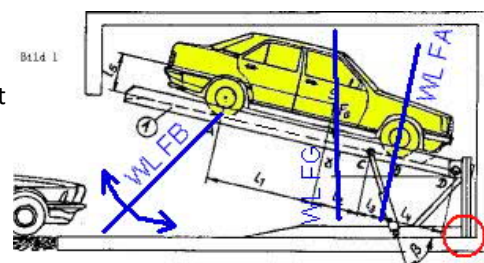


Abb. 17:

c Einwertiges Lager

Am Vorderrad können Kräfte nur in einer Richtung übertragen werden, nämlich in Richtung der WL. Rechtwinklig zur WL kann keine Kraft übertragen werden, weil das ungebremste Rad einfach davonrollen würde. Auch ein Drehmoment kann nicht übertragen werden, weil das Rad um den Punkt B drehbar ist. Es handelt sich um ein einwertiges Lager, weil es Kräfte nur in einer Richtung übertragen kann und in allen anderen Richtungen beweglich ist.



d **Zweiwertiges Lager**

Am Hinterrad wirken Kräfte in zwei Richtungen: Aufstandskräfte senkrecht zur Plattform und Reibungskräfte parallel zur Plattform. Das Hinterrad kann sich um den Punkt A drehen (z.B. wenn man am Vorderrad die Luft ablässt ☺). Es handelt sich um ein zweiwertiges Lager, weil es Kräfte in zwei Richtungen übertragen kann und in den anderen Richtungen beweglich ist.

e **Dreiwertiges Lager**

Der Pfosten überträgt an der rot markierten Stelle Kräfte und Drehmomente in 3 Richtungen auf das Fundament des Parkliftes, d.h. er kann sich weder seitwärts noch senkrecht bewegen, und er kann sich auch nicht drehen. Es handelt sich um ein dreiwertiges Lager. Dreiwertige Lager spielen in Abi-Aufgaben praktisch keine Rolle.

f **Vierwertige Lager**

gibt es in der Ebene nicht.

g **Statisch unbestimmt**

Wenn das Fahrzeug auch noch an der Vorderachse gebremst wäre, würden 4 unbekannte Kräfte wirken. Damit hat man mehr unbekannte Kräfte als Gleichgewichtsbedingungen ($\sum F_x=0$; $\sum F_y=0$; $\sum M=0$). Ein solches System nennt man statisch überbestimmt, weil es mehr Stützpunkte hat als nötig sind. Statisch unbestimmte Systeme sind nicht oder nur schwer lösbar. Das liegt daran, dass die Verteilung der Bremskraft zwischen Vorder- und Hinterachse auch von Unebenheiten in der Plattform, von der Steifigkeit der Karosserie usw. abhängt.

Ein statisch überbestimmtes System kann auch schon bei 3 unbekannten Größen vorliegen, und zwar

- im zentralen Kräftesystem (alle Kräfte gehen durch einen Punkt), weil die Gleichgewichtsbedingung $\sum M=0$ entfällt und man mit den verbleibenden 2 Gleichgewichtsbedingungen nur 2 Unbekannte ermitteln kann.
- im dezentralen Kräftesystem, z.B. wenn 3 unbekannte Kräfte parallel verlaufen. Ein Beispiel ist ein dreiaxsiges Fahrzeug, bei dem die Achslasten nur mit vereinfachenden Annahmen ermittelt werden können. Dieser Aufgabentyp spielt im Abi aber keine Rolle.

h **Bremsen**

Im Abitur werden die Aufgaben berechenbar gehalten, indem immer angegeben ist, dass nur eine Achse gebremst ist. Es wird meistens auch genannt, welche Achse gebremst ist, obwohl es bei Fahrzeugen, die auf ebenen Fläche stehen, gar keine Rolle spielt, welche Achse gebremst ist, denn die beiden Bremskräfte an Vorder- und Hinterachse haben dieselbe WL, und Kräfte darf man bekanntlich auf ihrer WL beliebig verschieben.

Im Fach Statik und auf dem Parkplatz ist es also egal, ob Hinter- oder Vorderrad gebremst ist.

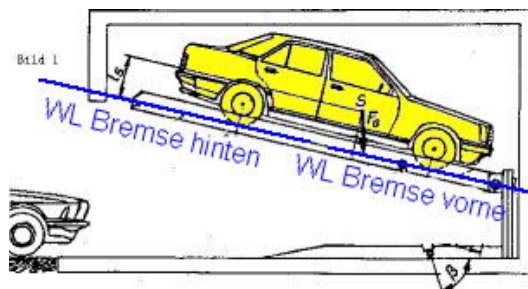


Abb. 18:

Auf der Straße heißt das Fach aber Dynamik, und da macht es für die maximale Bremskraft und für das Fahrverhalten einen erheblichen Unterschied, ob die Vorder- oder die Hinterachse gebremst wird. Auf der Vorderachse ist die Bremswirkung besser, weil beim Bremsen ein zusätzliches Drehmoment entsteht, das auf die Vorderachse drückt und dort die Normalkraft verstärkt - das Fahrzeug nickt beim Bremsen. Das gilt auch bei Zweirädern - solange die Gewichte nicht über den Lenker fliegen :-)

Beispiel 1b Bohrmaschinenständer

Die WL der unbekannten Kräfte F_A und F_B liegen waagrecht, weil die Berührflächen zwischen Führungssäule (Pos. 3) und Bohrmaschinenführung (2) senkrecht verlaufen. In senkrechter Richtung werden keine Kräfte übertragen, sonst könnte sich die Bohrmaschine nicht senkrecht bewegen.

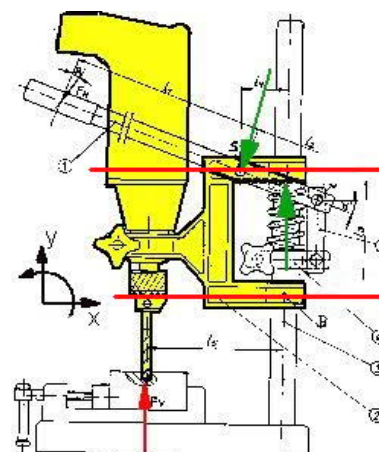


Abb. 19:



Beispiel 1a Bohrmaschinenständer

Die Kraft F_S wird durch einen Bolzen übertragen, der in einer Bohrung steckt. Da man nicht weiß, an welcher Seite der Bohrung der Bolzen anliegt, kann man die WL der Kraft F_S nicht bestimmen.

Die Bewegungsrichtung der Bohrmaschinenführung (2) ist kein Hinweis auf die Richtung der Kraft F_S . Die Bewegungsrichtung hängt nämlich nicht nur alleine von F_S ab, sondern von der Summe aller Kräfte, die auf die Bohrmaschinenführung wirken, und dazu gehören auch F_A und F_B .

Wenn der Bolzen in einem Langloch (= Schlitz mit geraden Seitenwänden) stecken würde, wäre die Wirklinie eindeutig gegeben.

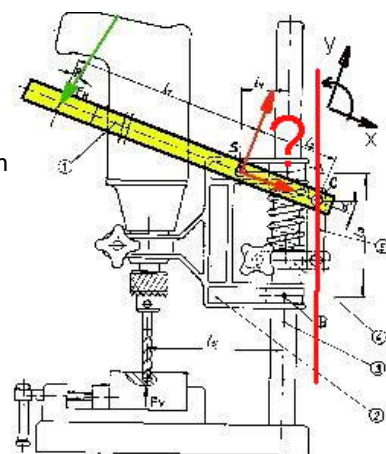


Abb. 20:

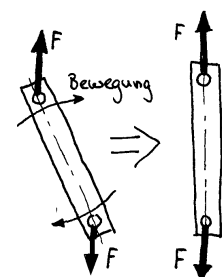
i Zweigelenkstäbe

Die Wirklinie einer Kraft kann auch aus angrenzenden Seilen, Ketten und Zweigelenkstäben (Pendelstützen) abgelesen werden.

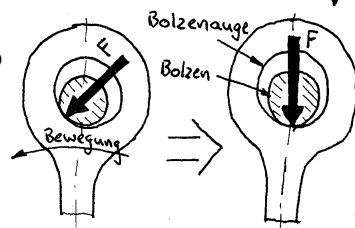
Beispiel 1a Bohrmaschinenständer: Auch in C überträgt ein Bolzen die Kraft F_C auf eine Bohrung, sodass man die WL aus der Berührfläche so nicht ablesen kann. Hier ist die angrenzende Lasche (Pos. 5) der Schlüssel zur Wirklinie. Die Lasche ist an zwei Stellen drehbar befestigt. Wenn man an einem solchen Bauteil zieht, richtet es sich in der Richtung des Zuges aus. Da die Lasche senkrecht gezeichnet ist, verläuft auch die Wirklinie von F_C senkrecht. In Abi-Aufgaben genügt für senkrechte oder waagerechte bzw. rechtwinklige oder parallele Linien der Augenschein. Wenn eine Richtung von den Hauptachsen abweicht, wird es extra angegeben, zum Beispiel bei der Handkraft F_H . Ein Bauteil wie diese Lasche nennt man einen Zweigelenkstab oder eine Pendelstütze.

Zweigelenkstäbe bzw. Pendelstützen sind Bauteile, die an 2 Stellen drehbar aufgehängt sind.

Wenn Sie auf Zug oder Druck belastet werden, richten sie sich in Richtung der Kraft aus und zeigen so die Wirklinie der Kraft an. Die Wirklinie verläuft durch die Mittelpunkte der beiden Aufhängungen. Typische Zweigelenkstäbe sind die Lasche in Beispiel 1a Bohrmaschinenständer und alle hydraulische oder pneumatische Kolben (z.B. im Zweigelenkarm oder im Parklift). Im Bild rechts sieht man die Ausrichtung eines Zweigelenkstabes unter Zugkraft.



Auch unter Druckkraft liegen Zweigelenkstäbe in Krafrichtung. Wenn der Bolzen (Bild) seitlich liegt und drückt, bewegt sich das Bolzenauge des Zweigelenkstabes so weit zur Seite, bis keine seitliche Kraft mehr wirkt. Genau genommen richtet sich die Kraft nach dem Zweigelenkarm und nicht umgekehrt.



j Seile, Ketten, Riemen

Seile, Ketten, Riemen usw. geben ebenfalls die Wirklinie einer Kraft an, sie können aber nur Zugkräfte übertragen.

k Runde Körper (Räder, Rollen ..)

Runde Körper (Räder, Rollen ..) übertragen wie alle Körper die Kräfte senkrecht zu ihrer Berührfläche, deshalb verläuft bei runden Körpern die WL zwangsläufig durch ihren Mittelpunkt. Der Durchmesser einer Rolle spielt keine Rolle.

l Sonstige Hinweise

In Gitterkonstruktionen von Kranen oder Brücken (so genannte Stabwerke), nimmt man an, dass die einzelnen Stäbe drehbar gelagert sind, auch wenn sie mit großen Knotenblechen und hunderten von Nieten verbunden sind. Diese Annahme ist sinnvoll, weil eine geringe Drehung immer möglich ist. Dadurch können diese Stäbe vereinfacht als Zweigelenkstäbe berechnet werden.



3.2.6 Richtungskonvention für Kräfte beim Freimachen

Tragen Sie für die bekannten Kräfte die Richtungen so ein, wie der Rest der Welt auf die freigemachte Baugruppe wirkt.

Problem: Wie oben schon gesehen treten Kräfte immer paarweise auf. Die Räder drücken auf die Plattform, und die Plattform drückt zurück. Die Bremskraft an der Hinterachse zieht die Plattform nach rechts unten, aber umgekehrt auch das Fahrzeug nach links oben, sonst würde die Hangabtriebskraft Bewegung in die Sache bringen. Sogar die Schwerkraft wirkt paarweise, denn nicht nur die Erde zerzt am Auto, sondern auch das Auto hebt die Erde an (Wenn man das Auto durch den Mond ☺ ersetzt, ist das Phänomen bekannter).

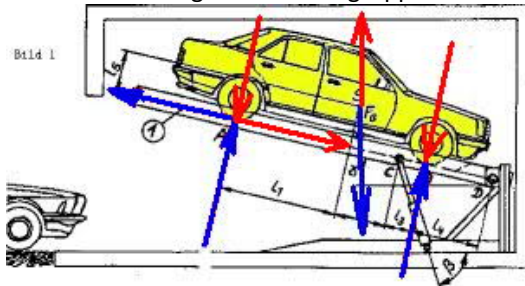


Abb. 21:

Wenn man in der Statik mit Kräftepaaren rechnete, die sich gegenseitig aufheben, wäre die Summe aller Kräfte immer Null und man bekäme keine brauchbare Lösung. Deshalb hat man das Freimachen erfunden: Man lässt eine Hälfte der Kräftepaare einfach weg. Die Frage ist natürlich: welche Hälfte ?

a Richtungsregel

Zunächst benötigt man einen Bezugspunkt, und der ist sinnvollerweise die freigemachte Baugruppe. Danach bleiben noch zwei Möglichkeiten: 1) was macht die Baugruppe mit dem Rest der Welt (rot) oder 2) was macht der Rest der Welt mit der Baugruppe (blau).

Die Wahl fiel auf Möglichkeit 2: „Wie wirken die Plattform und die Erde auf das Fahrzeug“ (blaue Kräfte).

Die roten Kräfte fallen weg, sonst müsste man die Schwerkraft nach oben eintragen.

b Richtung von Reibungskräften

wirken entgegen der Bewegungsrichtung der freigemachten Baugruppe bzw., genauer, entgegen der antreibenden Kraft. Im Bild des Fahrzeuges auf dem Parklift neigt das Fahrzeug zur Bewegung nach rechts unten, deshalb wird die Reibungskraft nach links oben eingetragen.

c Richtung für unbekannte Kräfte

Für unbekannte Kräfte muss man die Richtungen nicht kennen, weil sie mit der Lösung ermittelt werden. Für rechnerische Lösungen ist es aber notwendig, eine Richtung anzunehmen und zu kennzeichnen.

Querverweis zum Rechnen

Eintrag der Krafrichtung für ein- und zweiwertige Lager

Annahme der Richtung für die rechnerische Lösung

Für rechnerische Lösungsverfahren gibt man auch für unbekannte Kräfte eine Richtung an, weil man eine Vorgabe für die Vorzeichen in den Gleichungen benötigt (s.u.). Es müssen aber nicht die „richtigen“ Richtungen sein. Wenn man die Richtung „falsch“ gewählt hat, erkennt man das am negativen Vorzeichen im Ergebnis.

Man muss die Richtungen also nicht wissen, sondern nur annehmen.

Wenn man sie richtig annimmt, spart man sich allerdings einige Minuszeichen.

3.2.7 Lösbarkeit der Aufgabe überprüfen

Bevor Sie weitermachen, sollten Sie prüfen, ob die Aufgabe mit Ihrem bisherigen Ansatz lösbar ist.

Wenn nicht alle folgenden Kriterien erfüllt sind, hat es keinen Zweck, weiter zu machen. Man verliert dann nicht nur die Punkte, sondern auch noch Zeit – und zwar viel Zeit, weil es keine Lösung gibt.

a Kriterien für die Lösbarkeit

Alle Kriterien für die Lösbarkeit von Abiaufgaben sind oben schon genannt:

- Sind die gesuchten Kräfte in der Lageskizze enthalten ?
- Ist mindestens eine bekannte Kraft in der Lageskizze enthalten ?
- Sind max. 3 unbekannte Beträge und / oder Richtungen in der Lageskizze enthalten ?

Im Abi sind 2 Varianten üblich

- entweder sind 3 Wirklinien gegeben und die Beträge gesucht
- oder es ist eine Kraft mit Betrag und Wirklinie gesucht und der Betrag einer weiteren Kraft bei bekannter WL.



4 Lösungsverfahren wählen

Nach dem Freimachen, einer vergleichsweise anspruchsvollen Tätigkeit, folgen die Routinetätigkeiten, nämlich die Auswahl des Lösungsverfahrens und die Lösung selbst. Beides kann man anhand von Algorithmen Punkt für Punkt abarbeiten.

4.1 Rechnerische oder zeichnerische Lösung ?

In den Statik-Abiaufgaben des Landes Baden-Württemberg wurde in den letzten Jahren meist vorgegeben, ob eine Aufgabe rechnerisch oder zeichnerisch zu lösen sei. Man hat also keine Wahl, muss nur noch entscheiden, welches Lösungsverfahren innerhalb des Rechnens oder des Zeichnen geeignet ist, und kann zum nächsten Kapitel springen.

Wenn man die Wahl zwischen Rechnen und Zeichnen hat, hilft eigentlich nur Erfahrung (= Übung !). Immerhin gibt es einige Anhaltspunkte:

Rechnerische Lösungen sind für alle Aufgabenstellungen geeignet, werden aber bei mehreren Kräften, fehlenden rechten Winkeln und komplizierten Bemaßungen aufwändig. Pauschal sollte man die rechnerische Lösung wählen,

- wenn die Aufgabenstellung einfach ist
- oder wenn nicht nach Kräften gefragt ist, sondern nach Kippwinkeln o.ä.

Zeichnerische Lösungen sind vorzuziehen, wenn nach Kräften gefragt ist und komplizierte Bemaßungen bzw. schiefe Winkel vorliegen.

4.2 Welches rechnerische Verfahren ?

Die rechnerischen bzw. analytischen Verfahren, die unten beschrieben werden, können gleichwertig verwendet werden. Sie unterscheiden sich nur in der Vorgehensweise und können nach persönlichem Geschmack gewählt werden.

4.3 Welches zeichnerische Verfahren ?

Zur Lösung stehen mehrere Verfahren zur Verfügung, das 3-Kräfte-Verfahren und das Schlusslinienverfahren werden vom Lehrplan verlangt.

Das Schlusslinienverfahren ist für alle Aufgaben des Abiturtyps einsetzbar. Wer also in der Vorbereitung Zeit sparen will ☹, kann sich auf dieses Verfahren beschränken. Empfehlenswert ist das aber nicht, denn mit den anderen Verfahren kann man viel Zeit sparen, wenn sie geeignet sind. Wer also während der Klausur Zeit sparen will, sollte alle Verfahren beherrschen ☺.

4.3.1 Voraussetzungen für das 3-Kräfteverfahren

Das 3-Kräfteverfahren kann verwendet werden, wenn die folgenden Voraussetzungen gegeben sind:

- Gegeben sind genau 3 Kräfte
- Kraft 1: vollständig bekannt
- Kraft 2: nur die Wirklinie ist bekannt
- Kraft 3: Wirklinie und Betrag sind unbekannt
- Gesucht ist Betrag und Richtung von Kraft 3 und der Betrag von Kraft 2
- Einschränkung: Die bekannten Wirklinien dürfen nicht parallel liegen

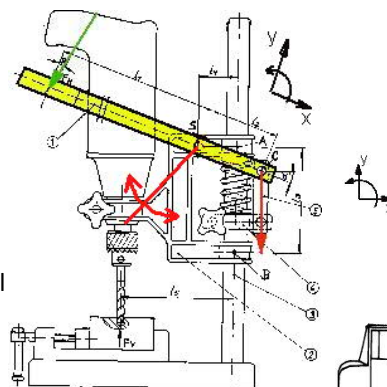


Abb. 23:

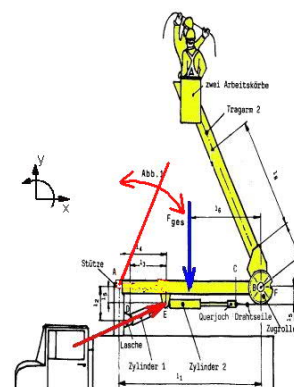


Abb. 22:

4.3.2 Voraussetzungen für das 4-Kräfteverfahren (Culmannsches Verfahren)

Das 4-Kräfteverfahren ist laut Lehrplan nicht vorgeschrieben, aber es ergibt sich zwanglos aus dem 3-Kräfte-Verfahren und wird deshalb hier beschrieben. Es kann verwendet werden, wenn die folgenden Voraussetzungen gegeben sind:

- Gegeben sind genau 4 Kräfte



- Kraft 1: ist vollständig bekannt
- Kraft 2 bis 4: Wirklinien sind bekannt, Beträge sind gesucht
- Einschränkung: Es dürfen nicht mehr als zwei Wirklinien zueinander parallel liegen

Häufig kann das 4-Kräfteverfahren statt des 3-Kräfteverfahrens verwendet werden, wenn statt Betrag und Richtung einer Kraft ihre beiden Komponenten F_x und F_y gesucht sind.

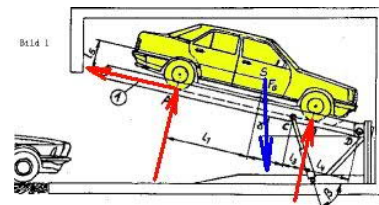


Abb. 24:

4.3.3 Voraussetzungen für das Schlusslinienverfahren

Das Schlusslinienverfahren ist für alle Aufgaben verwendbar. Da es aufwändiger als das 3- oder 4-Kräfte-Verfahren ist, sollte man es in Klausuren nur einsetzen, wenn die anderen Verfahren nicht geeignet sind. Das kommt im Abitur häufig vor. Das Schlusslinienverfahren sollte eingesetzt werden,

- wenn 5 oder mehr Kräfte im Spiel sind (wie im Bohrmaschinenständer)
- wenn 3 oder mehr Kräfte zueinander parallel liegen (wie in dem Balken in Abb. 26)

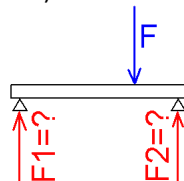


Abb. 26:

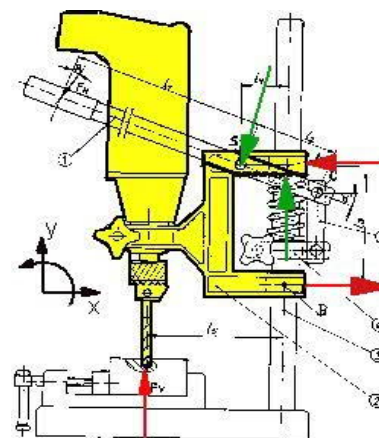


Abb. 25:

4.3.4 Voraussetzungen für das Seileckverfahren

Das Seileckverfahren kann verwendet werden, um eine einzelne Kraft mit unbekannten Angriffspunkt zu ermitteln. Typisch werden damit resultierende Kräfte im allgemeinen Kräftesystem ermittelt. Da es sinngemäß durch das Schlusslinienverfahren ersetzt werden kann, wird es hier nicht beschrieben.



5 Rechnerische (analytische) Verfahren

Eigentlich ist die rechnerische Lösung ganz einfach: Man setzt für beliebige Koordinatensysteme und für beliebige Drehpunkte die drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x=0$; $\Sigma F_y=0$ und $\Sigma M=0$ an. Das Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten traktiert man mit ein paar mathematischen Taschenspielerereien, bis es gelöst ist – und ist fertig.

Dabei gibt es aber Möglichkeiten, geschickt oder ungeschickt vorzugehen, und das ungeschickte Vorgehen kann in einer Klausur viel Zeit (= Punkte) kosten. Mindestens genauso nachteilig ist, dass individuelle Lösungen viel Konzentration erfordern, die man in einer Abi-Klausur von 270 Minuten nicht durchhalten kann, und wenn man es trotzdem versucht, steigt das Fehlerrisiko.

Im Folgenden werden Verfahren beschrieben, mit denen man die üblichen Statikaufgaben routinemäßig lösen kann, d.h. schnell und zuverlässig bei mittlerer Belastung des Bregen¹.

Auch wenn junge Menschen gerne auf ihre Individualität pochen: Ohne Individualität gibt es gewöhnlich mehr Punkte !

5.1 Lageskizze für rechnerische Verfahren

Für alle rechnerischen Verfahren ist eine Lageskizze erforderlich. In ihr müssen alle Kräfte mit Richtung und Angriffspunkt eingetragen sein (Welche Kräfte werden eingetragen → Kap. *Freimachen*). Freimachen ist nötig, um festzustellen, welche Kräfte wirken. In der Lageskizze hält man die wirkenden Kräfte fest, damit man beim Ansetzen der Gleichungen keine vergisst.

Die Lageskizze für rechnerische Lösungen unterscheidet sich in den folgenden Punkten vom Lageplan für zeichnerische Lösungen:

5.1.1 unmaßstäblich

Die Lageskizze kann von Hand und unmaßstäblich gezeichnet sein.

Man kann durchaus die Lageskizze verwenden, die oben beim Freimachen beschrieben ist.

5.1.2 Koordinatensystem

Zusätzlich zur Lageskizze muss angegeben werden, welches Koordinatensystem verwendet wird.

Für meine Schüler genügt es, durch ein Symbol (siehe rechts) anzudeuten, welches Koordinatensystem verwendet wird. Wenn kein Symbol angegeben ist, gehe ich davon aus, dass die „normalen“ Koordinaten mit der x-Achse nach rechts und der y-Achse nach oben verwendet werden.



Das Koordinatensystem wird als Bezugssystem für die Vorzeichen in den Gleichungen benötigt. Ohne Koordinatensystem kann man leicht mit den Vorzeichen durcheinander kommen und Fehler produzieren.

¹ Der Duden definiert Bregen als „nordd. für Gehirn vom Schlachtvier“.



5.1.3 Zerlegung von Kräften

Wenn für eine Kraft die Wirklinie nicht bekannt ist, ist es sinnvoll, die x- und y-Komponenten der Kraft einzutragen (Zweiwertiges Lager).

Die Angabe der Komponenten ist sinnvoll, weil zunächst nur die Komponenten bestimmt werden. Betrag und Richtung einer Kraft berechnet man dann aus den Komponenten.

Beispiel siehe rechts, weitere Beispiele im Kapitel *Freimachen*.

5.1.4 Unbekannte Richtungen vorläufig annehmen

Für alle unbekannten Kräfte müssen Richtungen vorläufig angenommen und angegeben werden.

Die Richtungsangabe für eine unbekannte Kraft ist für das Vorzeichen in der Gleichung notwendig. Eine Kraft, die in derselben Richtung wie Koordinate eingetragen ist, ist positiv. Gegen die Koordinate gerichtet, erhält die Kraft ein Minus.

Die Richtungsangabe in der Lageskizze ist nur eine vorläufige Annahme, sie muss nicht „richtig“ sein. Wenn die Richtung „falsch“ angenommen wurde, erfährt man dies, wenn das Ergebnis der Berechnung negativ ist. Man sollte dann aber nicht die Richtung in der Lageskizze ändern, weil man dann wieder alle Vorzeichen in den Gleichungen ändern müsste. Es genügt, wenn man hinter dem negativen Ergebnis anmerkt, dass die wirkliche Kraft entgegen der angenommenen Richtung wirkt.

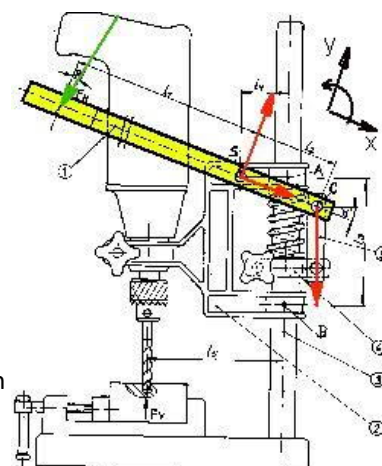


Abb. 27:



5.2 Rechnerische Verfahren im zentralen Kräftesystem

Im zentralen Kräftesystem verlaufen alle Wirklinien durch einen Punkt, deshalb gibt es keine Hebelarme und keine Drehmomente. Ohne Momente bleiben in der Ebene nur 2 Gleichgewichtsbedingungen übrig ($\sum F_x=0$ und $\sum F_y=0$), deshalb können auch nur zwei unbekannte Größen (Betrag und / oder Richtung von Kräften) ermittelt werden.

Trotz dieser Vereinfachung unterscheiden sich die rechnerischen Verfahren im zentralen Kräftesystem nicht wesentlich von den Verfahren im allgemeinen System. Dieses Kapitel ist aber geeignet, grundlegende Themen wie die Kräftezerlegung usw. ausführlich zu behandeln. Wer dies nicht braucht, kann dieses Kapitel getrost überspringen.

wird ergänzt

5.3 Rechnerische Verfahren im allgemeinen Kräftesystem

Hier wird eine Vorgehensweise geschildert, die meist zur Lösung mit dem minimalen oder fast minimalen Aufwand führt. Wenn man diese Vorgehensweise einübt, kann man Statikaufgaben routinemäßig lösen, d.h. schnell und zuverlässig.

Voraussetzung ist eine Lageplanskizze nach den Kapitel 3.2.2

1 Beginnen Sie mit der ersten Gleichgewichtsbedingung $\sum M=0$

Wenn Sie den Drehpunkt geschickt wählen, erhalten Sie eine Gleichung mit einer Unbekannten, die sofort gelöst werden kann. Sie müssen also kein Gleichungssystem lösen, sondern nur einzelne Gleichungen.

5.3.1 Wahl des Drehpunktes

Wählen Sie den Drehpunkt so, dass er im Schnittpunkt der Wirklinien von unbekannten Kräften liegt, und bezeichnen Sie den Punkt.

Kräfte, deren Wirklinien durch den Drehpunkt verlaufen, müssen in der Gleichgewichtsbedingung $\sum M=0$ nicht berücksichtigt werden, weil sie ein Drehmoment mit dem Hebelarm 0 bewirken. Wenn man also den Drehpunkt geschickt wählt, verbleibt nur eine unbekannte Kraft in der Gleichung. Diese Kraft kann man berechnen, ohne mit den anderen Gleichgewichtsbedingungen zu jonglieren.

Meistens gibt es **mehrere Schnittpunkte** unbekannter Kräfte (bzw. ihrer Wirklinien). Dann wählt man den Punkt, von dem die Bemaßung ausgeht.

Manchmal wird in einer folgenden Teilaufgabe gefragt, ab welchem Gewicht bzw. Winkel eine Konstruktion kippt. Dann ist es sinnvoll, den Drehpunkt für diese Teilaufgabe zu wählen, so muss man die Gleichung nur einmal ansetzen.

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer

Es gibt 3 Kandidaten für den Drehpunkt.

Der oberste Drehpunkt im Schnitt von F_{sy} und F_c wäre sehr ungeschickt, weil er nicht bemaßt ist. Er müsste erst berechnet werden, und das kostet zu viel Zeit.

Der Punkt S ist geeignet. Er hat den kleinen Nachteil, dass die Kraft F_c nicht rechtwinklig zur Bemaßung steht und schon hier zerlegt werden muss. Er hat den Vorteil, dass an der Bemaßung nichts gerechnet werden muss.

Der Punkt C ist ebenfalls geeignet, dort entfallen F_c und F_{sx} .

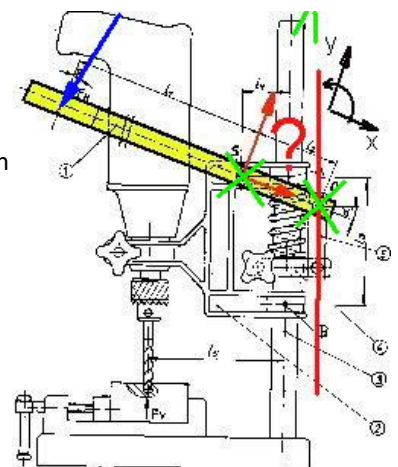


Abb. 28:



Beispiel 1b Bohrmaschinenständer

Die beiden Möglichkeiten sind die Schnittpunkte von F_V mit F_A bzw. F_B . Der obere Schnittpunkt ist günstiger, weil auch die Wirklinie von F_{Sk} durch diesen Punkt verläuft, dadurch wird die Gleichung noch einfacher (s.u.).

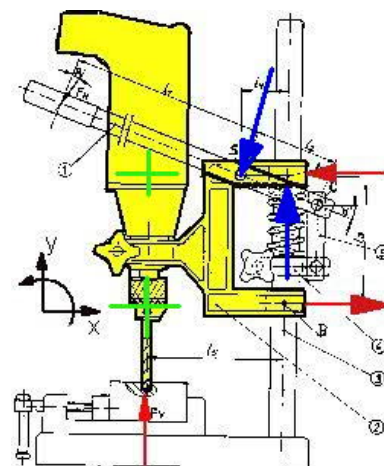


Abb. 29:

Beispiel 2 Zweigelenkarm

Hier bietet sich das zweiwertige Lager A als Drehpunkt an. Es gibt zwar noch zwei weitere Schnittpunkte unbekannter Kräfte, aber die kann man nur mathematischen Masochisten empfehlen.

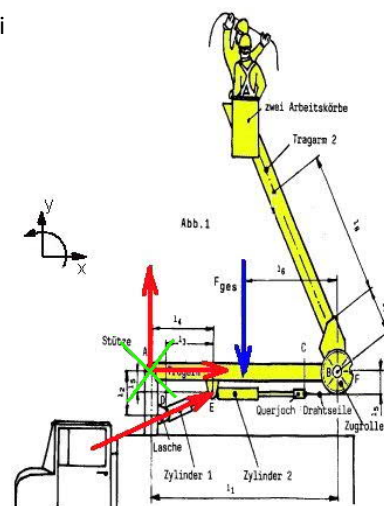


Abb. 30:

Beispiel 3a Parklift

Als Drehpunkte sind die Punkte A und B gleichberechtigt geeignet.

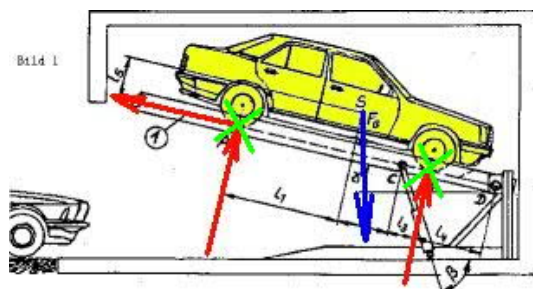


Abb. 31:

Beispiel 3b Parklift

Das zweiwertige Lager D drängt sich auf.

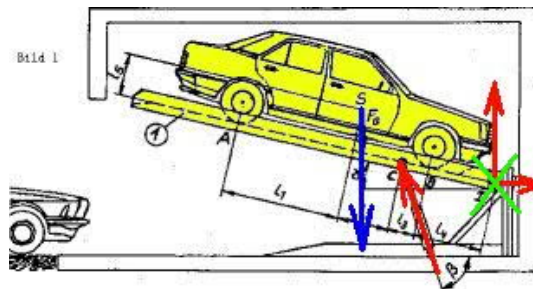


Abb. 32:



5.3.2 Gleichgewichtsbedingung $\sum M_i = 0$ ansetzen

Setzen Sie die Gleichgewichtsbedingung $\sum M_i = 0$ an. Die Gleichung bedeutet, dass die Summe aller Drehmomente, die von den Kräften in der Lageskizze bezüglich des gewählten Drehpunktes erzeugt werden, 0 (Null) ergeben muss.

Umgekehrt formuliert: Die Drehmomente müssen sich gegenseitig aufheben, sonst würde das Teil anfangen zu drehen. Die Gleichgewichtsbedingung gilt für jeden beliebigen Drehpunkt.

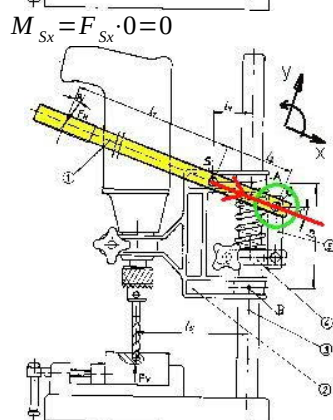
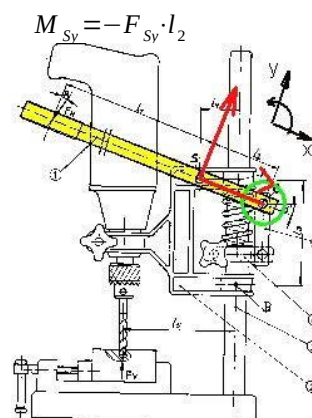
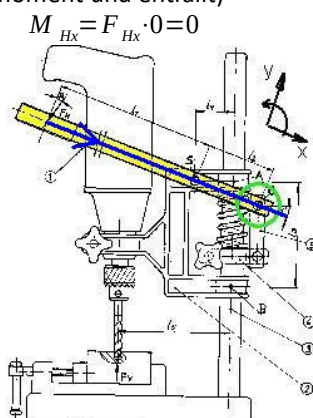
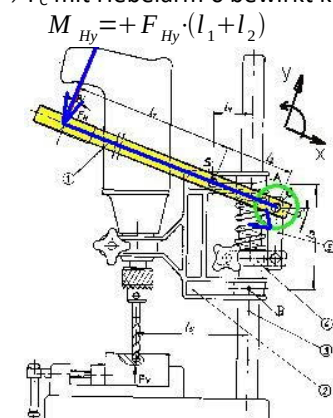
Das Drehmoment, das von einer Kraft erzeugt wird, ist das Produkt aus Kraft mal Hebelarm bezüglich des Drehpunktes.

5.3.3 Hebelarm

Der Hebelarm muss rechtwinklig zur Kraft liegen. Vorzeichenregel und Kräftezerlegung siehe unten.

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer, Drehpunkt C

($\Rightarrow F_C$ mit Hebelarm 0 bewirkt kein Drehmoment und entfällt)



Die erste Gleichgewichtsbedingung mit Lösung

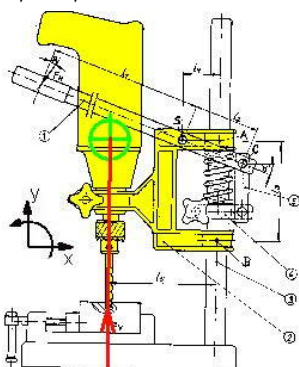
$$\sum M_C = 0 = F_{Hy} \cdot (l_1 + l_2) - F_{Sy} \cdot l_2 = F_H \cdot \cos \alpha \cdot (l_1 + l_2) - F_{Sy} \cdot l_2 \Rightarrow$$

$$F_{Sy} = F_H \cdot \frac{\cos \alpha \cdot (l_1 + l_2)}{l_2}$$

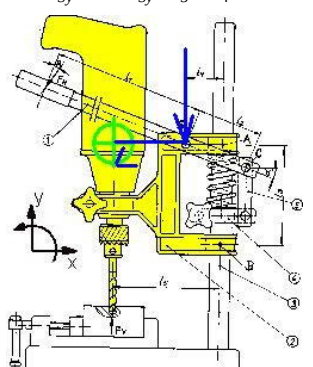
$$= 100 \text{ N} \cdot \frac{\cos 10^\circ \cdot (300 \text{ mm} + 90 \text{ mm})}{90 \text{ mm}} = 426,8 \text{ N} = F_{Sy}$$

Beispiel 1b Bohrmaschinenständer, Drehpunkt im Schnitt der Wirklinien F_A und F_V .

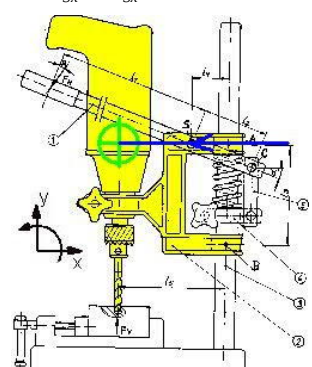
$$M_V = F_V \cdot 0 = 0$$



$$M_{Sy} = -F_{Sy} \cdot (l_5 - l_4)$$

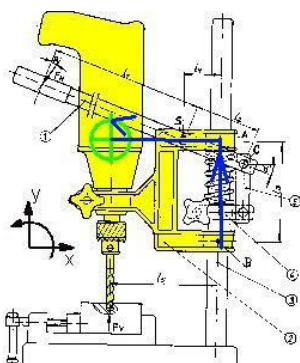


$$M_{Sx} = F_{Sx} \cdot 0 = 0$$

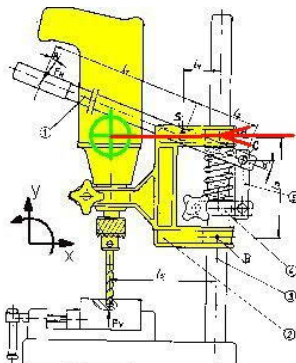




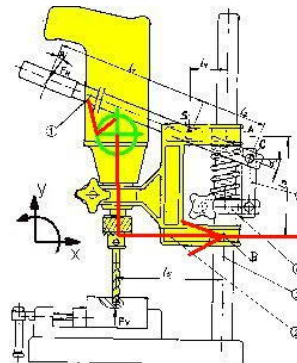
$$M_F = +F_F \cdot l_5$$



$$M_A = F_A \cdot 0 = 0$$



$$M_B = +F_B \cdot l_3$$



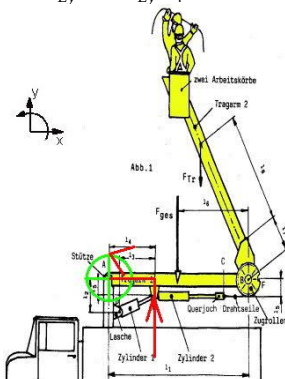
$$\sum M_{AV} = 0 = -F_{Sy} \cdot (l_5 - l_4) + F_F \cdot l_5 + F_B \cdot l_3 \Rightarrow$$

$$F_B = \frac{F_{Sy} \cdot \cos 85^\circ \cdot (l_5 - l_4) - F_F \cdot l_5}{l_3} = \frac{450 \text{ N} \cdot \cos 85^\circ \cdot (150 - 50) \text{ mm} - 80 \text{ N} \cdot 150 \text{ mm}}{140 \text{ mm}} = 234,5 \text{ N} = F_B$$

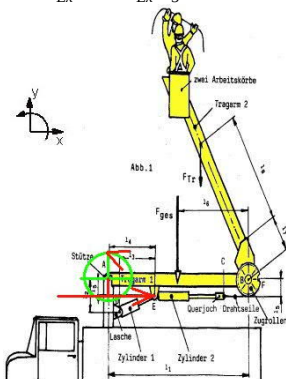
Beispiel 2 Zweigelenkarm, Drehpunkt in A:

($\Rightarrow F_A$ bewirkt kein Drehmoment, weil Hebelarm = 0)

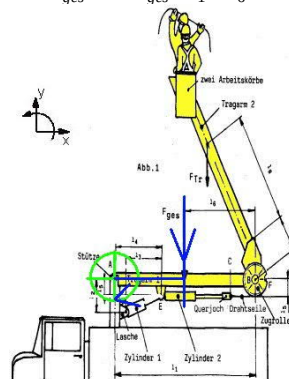
$$M_{Ey} = +F_{Ey} \cdot l_4$$



$$M_{Ex} = +F_{Ex} \cdot l_5$$



$$M_{ges} = -F_{ges} \cdot (l_1 - l_6)$$



5.3.4 Kraft steht nicht rechtwinklig zur Bemaßung

Wenn eine Kraft nicht rechtwinklig zur Bemaßung steht, sollte man die Kraft in zwei Komponenten zerlegen, die rechtwinklig zur Bemaßung stehen. Man muss dann beide Komponenten als Drehmomente einbringen.

Es ist geht zwar in einigen Fällen etwas schneller, wenn man den Hebelarm berechnet, anstatt die Kraft in Komponenten zu zerlegen, aber in vielen Fällen ist dieser Weg wesentlich komplizierter (Seltene Ausnahme: Hauptprüfung 2003/04-1 Containerkran). Besser ist es, immer dasselbe Verfahren routinemäßig auszuführen, auch wenn man dabei manchmal (!) etwas Zeit verliert. Übrigens kann man die Kräftezerlegung bei den Gleichgewichtsbedingungen $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$ wiederverwenden, wenn man, wie oben vorgeschlagen, das Koordinatensystem parallel zur Bemaßung gewählt hat.

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer; Drehmoment im Drehpunkt C verursacht von F_H

Der Hebelarm für F_H beträgt

$$l = \cos \beta \cdot (l_1 + l_2)$$

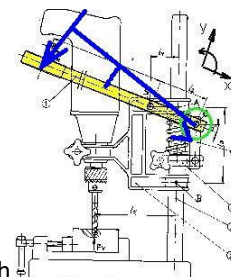
$$\Rightarrow M_H = +F_H \cdot \cos \beta \cdot (l_1 + l_2)$$

Berechnung mit Zerlegung der Komponenten

$$M_H = +F_{Hy} \cdot (l_1 + l_2) + F_{Hx} \cdot 0$$

$$= F_H \cdot \cos \beta \cdot (l_1 + l_2)$$

In diesem Fall scheint der erste Weg schneller zu sein, wenn man die Zeit zum Finden der Lösung nicht berücksichtigt und auch vergisst, dass man die Zerlegung in F_{Hx} und F_{Hy} später noch einmal benötigt. Aber schon beim nächsten Problem wird es schwieriger.





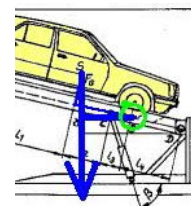
Beispiel 3a Parklift; Drehmoment im Drehpunkt B verursacht von F_G

Der Hebelarm für F_G beträgt

$$l = \cos \alpha \cdot (l_2 + l_3) - \sin \alpha \cdot l_5$$

$$\Rightarrow M_G = F_G \cdot [\cos \alpha \cdot (l_2 + l_3) - \sin \alpha \cdot l_5]$$

Bereits bei diesem häufig vorkommenden Aufgabentyp „Schwerkraft auf schiefer Ebene“ wird es wesentlich komplizierter, den Hebelarm zu berechnen. Hier führt der Weg über die Zerlegung der Komponenten schneller zum Ziel. Das Ergebnis ist natürlich dasselbe.



Beispiel 2 Zweigelenkarm: Drehmoment im Drehpunkt A verursacht von F_E

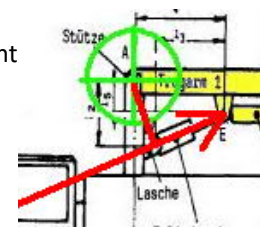
Wer bei dieser Aufgabe den Hebelarm berechnen will, ist selbst schuld. Ich tue es nicht ☺.

Mit der Zerlegung der Kraft F_E und den Hebelarmen zum Punkt E ergibt sich das Drehmoment

$$M_E = F_{Ex} \cdot l_2 + F_{Ey} \cdot (l_4 - l_3)$$

$$M_E = F_E \cdot \cos \alpha_E \cdot l_2 + F_E \cdot \sin \alpha_E \cdot (l_4 - l_3)$$

$$\text{mit } \alpha_E = \arctan \frac{l_2 - l_5}{l_3} = \arctan \frac{0,6\text{ m} - 0,3\text{ m}}{0,9\text{ m}} = 18,4^\circ$$



Übrigens kann man das Drehmoment auch mit den Hebelarmen zum Punkt D berechnen, denn dort herrscht dieselbe Kraft F_E . Diese Variante ergibt sich, wenn man den Zylinder 1 in der freigemachten Baugruppe einbezieht.

5.3.5 Vorzeichen für ein Drehmoment

Das Vorzeichen eines Drehmomentes ergibt sich aus der Drehrichtung: Dreht es gegen den Uhrzeigersinn, ist es positiv, mit dem Uhrzeiger ist es negativ.

Maßgebend ist nicht die Richtung einer Kraft, sondern **die Richtung der Drehbewegung um den gewählten**

Drehpunkt, die sie erzeugen würde. Stellen Sie sich vor, dass die freigemachte Baugruppe im Drehpunkt auch tatsächlich drehbar wäre. Überlegen Sie dann, in welche Richtung es von der Kraft gedreht würde, die Sie gerade betrachten, und wählen Sie zuletzt das Vorzeichen.

Beispiele finden Sie oben.

Dass die positive Drehrichtung gegen den Uhrzeiger weist, ist die übliche Konvention im rechtshändigen Koordinatensystem.

Koordinaten: Der Daumen der rechten Hand ist die x-Achse, der Zeigefinger die y-Achse und der Mittelfinger die z-Achse. Da die x-Achse nach rechts und die y-Achse nach oben weist, kommt der z-Achse aus der Blattebene heraus.
Drehrichtung: Wenn der Daumen der rechten Hand in Richtung einer Achse weist, zeigen die Finger der rechten Hand in die positive Drehrichtung. Für die z-Achse heißt das, dass der Daumen der rechten Hand nach oben weist und die Finger gegen den Uhrzeigersinn.

Die Drehung um die z-Achse ist die einzige Drehung, die in der x-y-Ebene stattfindet. Alle Drehmomente in der Ebene sind deshalb Drehmomente um die z-Achse M_z . Man gibt den Index z aber meist nicht an, weil es auch ohne Index eindeutig ist.

Ich empfehle, die positive Drehrichtung wie das Koordinatensystem anzugeben. Wenn man die Drehrichtung falsch angibt und dann konsequent damit rechnet, wird das Ergebnis trotzdem richtig.



5.3.6 Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$

Setzen Sie anschließend die anderen Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$. Hier gibt es keine Reihenfolge, die immer sinnvoll ist.

Man könnte auch wieder eine Drehmomentgleichung für einen anderen Drehpunkt ansetzen. Aber die Summe der Kräfte ergibt meistens einfachere Gleichungen als die Summe der Drehmomente.

Beispiele entnehmen Sie bitte den Gesamtbeispielen am Ende des Kapitels.

5.3.7 Zerlegung von Kräften in ihre Komponenten

Die Zerlegung von Kräften in ihre x- und y-Komponenten wird in allen Schritten benötigt.

Wenn die Richtung einer Kraft unbekannt ist, sollten Sie die Kraft in die Richtungen der Koordinaten zerlegen.

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer, Kraft F_C

Die Komponenten liegen in Richtung des Koordinatensystems (s.o.)

Der Handhebel ähnelt einer schiefen Ebene. Bei senkrechten oder waagerechten Kräften auf schiefen Ebenen taucht der Winkel α , um den die schiefe Ebene geneigt ist, auch bei der Kräftezerlegung auf.

Man kann ihn mit Wechsel-, Gegen- und Soweiter-Winkeln nachweisen oder einfach per Augenschein finden. Skizzieren Sie die Komponenten mit einem kleinen Winkel α , dann kann man die Lage des Winkels in der Skizze erkennen.

$$F_{Cx} = F_C \cdot \sin \alpha \quad F_{Cy} = F_C \cdot \cos \alpha$$



Auch wenn die Richtung einer Kraft bekannt ist, sollten Sie die Kraft so zerlegen, dass die Wirklinien ihrer Komponenten parallel zu den Koordinaten liegen. Für die Richtung der Komponenten sollten Sie aber die Richtung der Kraft übernehmen, weil Sie sonst mit negativen Komponenten rechnen müssen.

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer, Kraft F_H :

$$F_{Hx} = F_H \cdot \sin \beta \quad \text{wirkt nach links entgegen dem gewählten Koordinatensystem}$$

$$F_{Hy} = F_H \cdot \cos \beta \quad \text{wirkt nach unten entgegen dem gewählten Koordinatensystem}$$



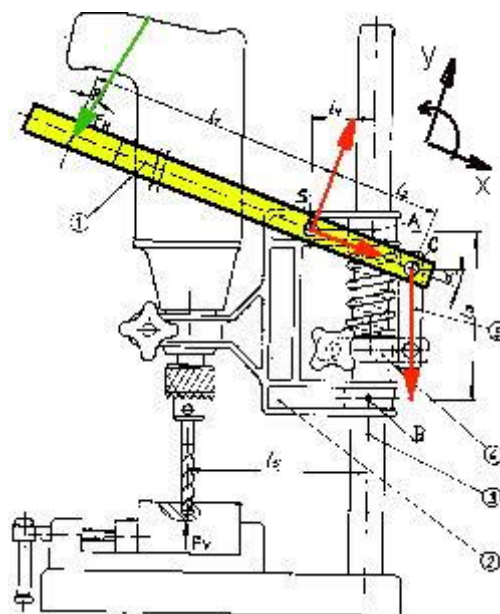


5.3.8 Gesamtbeispiele

Beispiel 1a Bohrmaschinenständer

Freigemachte Baugruppe: Handhebel

- F_H : ist gegeben
- F_C : Die Wirklinie ist durch das angrenzende Bauteil gegeben. Bei der Lasche handelt es sich um einen Zweigelenkarm, der an 2 Punkten drehbar gelagert ist und sich in Kraftrichtung ausrichtet.
- F_S : Die Wirklinie ist nicht bekannt, weil man nicht weiß, wie der Verbindungsbolzen in der Bohrung des Handhebels anliegt.
- Die Richtungen der unbekannten Kräfte sind für die rechnerische Lösung frei gewählt.
- Koordinatensystem: x-Achse parallel zum Handhebel
Drehpunkt im Lager C



$$\Sigma M_S = 0 = F_H \cdot \cos \beta \cdot l_1 - F_C \cdot l_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_C = F_H \cdot \frac{l_1 \cdot \cos \beta}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 100 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm} \cdot \cos 10^\circ}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ} = 349,3 \text{ N} = F_C$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \Rightarrow F_{Sy} = +F_H \cdot \cos \beta + F_C \cdot \cos \alpha = 100 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ + 349,3 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ = 426,7 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \Rightarrow F_{Sx} = F_H \cdot \sin \beta - F_C \cdot \sin \alpha = 100 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ - 349,3 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = -102,1 \text{ N}$$

$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102,1 \text{ N})^2 + (426,7 \text{ N})^2} = 438,7 \text{ N} = F_S$$

$$\gamma_S = \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}} = \arctan \frac{426,7 \text{ N}}{-102,1 \text{ N}} = -76,5^\circ = \gamma_S \text{ nach links oben gegen die } x\text{-Achse (Handhebel)}$$

Diese entspricht $\gamma_S = 83,5^\circ = 180^\circ - 76,5^\circ - 20^\circ$ nach rechts oben gegen die Waagerechte

Berechnung im „normalen“ Koordinatensystem:

$$\Sigma M_S = 0 = F_H \cdot \cos \beta \cdot l_1 - F_C \cdot l_2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow F_C = F_H \cdot \frac{l_1 \cdot \cos \beta}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 100 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm} \cdot \cos 10^\circ}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ} = 349,3 \text{ N} = F_C$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \Rightarrow F_{Sy} = F_C + F_H \cdot \cos(\alpha + \beta) = 349,3 \text{ N} + 100 \text{ N} \cdot \cos(10^\circ + 20^\circ) = 435,9 \text{ N}$$

$$\Sigma F_x = 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} \Rightarrow F_{Sx} = F_H \cdot \sin(\alpha + \beta) = 100 \text{ N} \cdot \sin(10^\circ + 20^\circ) = 50 \text{ N}$$

$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{50^2 + 435,9^2} \text{ N} = 438,8 \text{ N} = F_S$$

$$\gamma_S = \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}} = \arctan \frac{435,9 \text{ N}}{50 \text{ N}} = 83,5^\circ = \gamma_S \text{ nach rechts oben gegen die } x\text{-Achse (Waagerechte)}$$



Beispiel 1b Bohrmaschinenständer

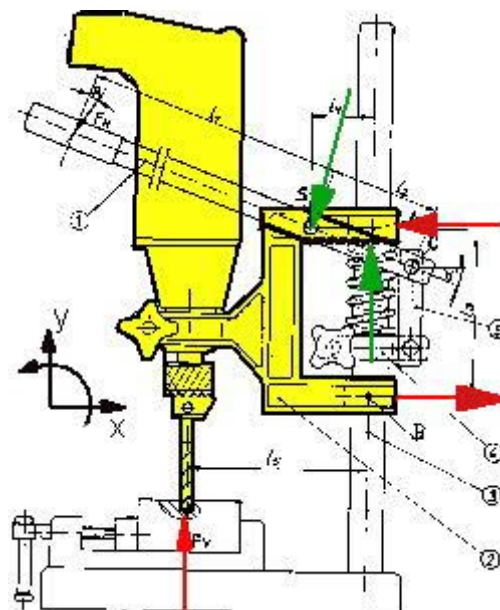
Freigemachte Baugruppe: Bohrmaschine mit Führung und Bohrer

- F_S und Federkraft F_F : sind gegeben.
- F_V : Die Wirklinie ist gegeben.
- F_A und F_B : Die Wirklinien sind durch die Führung gegeben. Die Führungsflächen stehen senkrecht, d.h. sie können Kräfte nur in waagerechter Richtung übertragen. In senkrechter Richtung werden keine Kräfte übertragen, sonst könnte sich die Bohrmaschine nicht bewegen.
- Die Richtungen der unbekannten Kräfte sind für die rechnerische Lösung frei gewählt.

Rechnerische Lösung:

Koordinatensystem normal.

Drehpunkt liegt im Schnittpunkt der Wirklinien von F_A und F_V .



$$\Sigma M_{AV}=0=-F_{Sy} \cdot (l_5-l_4)+F_F \cdot l_5+F_B \cdot l_3 \Rightarrow$$

$$F_B=\frac{F_S \cdot \sin \gamma_S \cdot (l_5-l_4)-F_F \cdot l_5}{l_3}=\frac{450 \text{ N} \cdot \sin 85^\circ \cdot (150-50) \text{ mm}-80 \text{ N} \cdot 150 \text{ mm}}{140 \text{ mm}}=234,5 \text{ N}=F_B$$

$$\Sigma F_y=0=F_V-F_{Sy}+F_F \Rightarrow F_V=F_S \cdot \sin \gamma_S-F_F=450 \text{ N} \cdot \sin 85^\circ-80 \text{ N}=368,3 \text{ N}=F_V$$

$$\Sigma F_x=0=-F_{Sx}-F_A+F_B \Rightarrow F_A=F_B-F_S \cdot \cos \gamma_S=234,5 \text{ N}-450 \text{ N} \cdot \cos 85^\circ=195,3 \text{ N}=F_A$$

Beispiel 2 Zweigelenkarm

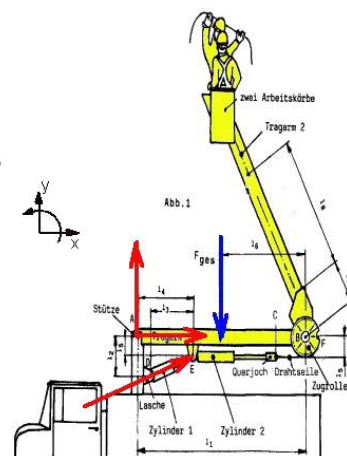
Freigemachte Baugruppe: beide Tragarme 1 und 2 mit Korb und Arbeitern. Wenn man nur den Tragarm 1 freimacht, handelt man sich unbekannte Kräfte und Momente im Gelenk zwischen Tragarm 1 und 2 ein, außerdem ist für Tragarm 1 keine Gewichtskraft gegeben.

- F_{ges} : ist gegeben
- F_E : Die Wirklinie ist durch das angrenzende Bauteil gegeben. Bei dem Kolben handelt es sich um einen Zweigelenkarm, der an 2 Punkten drehbar gelagert ist und sich in Kraftrichtung ausrichtet.
- F_A : Die Wirklinie ist nicht bekannt.
- Die Richtungen der unbekannten Kräfte sind für die rechnerische Lösung frei gewählt.

Zeichnerische Lösung nach dem 3-Kräfteverfahren

Rechnerische Lösung (im damaligen Abi nicht gefordert):

Koordinatensystem: x-Achse parallel zum Tragarm 1.



$$\alpha_E=\arctan \frac{l_2-l_5}{l_3}=\arctan \frac{0,6 \text{ m}-0,3 \text{ m}}{0,9 \text{ m}}=18,4^\circ$$

$$\Sigma M_A=0=F_{Ex} \cdot l_2+F_{Ey} \cdot (l_4-l_3)-F_{ges} \cdot (l_1-l_6)$$

$$\Sigma M_A=0=F_E \cdot \cos \alpha_E \cdot l_2+F_E \cdot \sin \alpha_E \cdot (l_4-l_3)-F_{ges} \cdot (l_1-l_6) \Rightarrow$$

$$F_E=F_{ges} \cdot \frac{l_1-l_6}{\cos \alpha_E \cdot l_2+\sin \alpha_E \cdot (l_4-l_3)}=6 \text{ kN} \cdot \frac{3,6 \text{ m}-1,8 \text{ m}}{\cos 18,4^\circ \cdot 0,6 \text{ m}+\sin 18,4^\circ \cdot (1,2 \text{ m}-0,9 \text{ m})}$$

$$F_E=16,26 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y=0=F_{Ay}+F_{Ey}-F_{ges} \Rightarrow F_{Ay}=F_{ges}-F_E \cdot \sin \alpha_E=6 \text{ kN}-16,26 \text{ kN} \cdot \sin 18,4^\circ=0,8675 \text{ kN}=F_{Ay}$$

$$\Sigma F_x=0=F_{Ax}+F_{Ex} \Rightarrow F_{Ax}=-F_E \cdot \cos \alpha_E=-16,26 \text{ kN} \cdot \cos 18,4^\circ=-15,4 \text{ kN}=F_{Ax}$$

(F_{Ax} wirkt entgegen der angenommenen Richtung, d.h. nach links)

$$F_A=\sqrt{F_{Ax}^2+F_{Ay}^2}=\sqrt{15,43^2+0,868^2} \text{ kN}=15,5 \text{ kN}=F_A$$

$$\alpha_S=\arctan \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}=\arctan \frac{0,8675 \text{ kN}}{-15,43 \text{ kN}}=-3,2^\circ=\alpha_E \text{ nach links oben gegen die negative } x\text{-Achse}$$



5.3.9 Beispiel, die vom vorgeschlagen Lösungsverfahren abweichen

HP 04/05-2 Pkw-Anhänger Aufgabe 5 und 6.1

HP 2002/03 Boots Kran Aufg. 1: Zwei Kräfte liegen auf einer WL: Entweder zusammenfassen und den dazwischen liegenden Polstrahl weglassen, oder den Polstrahl einzeichnen und dann bemerken, dass er im LP zwischen den identischen WL der beiden Kräfte nicht erscheint.

5.3.10 Zeichnerische Lösung

Schlusslinienverfahren

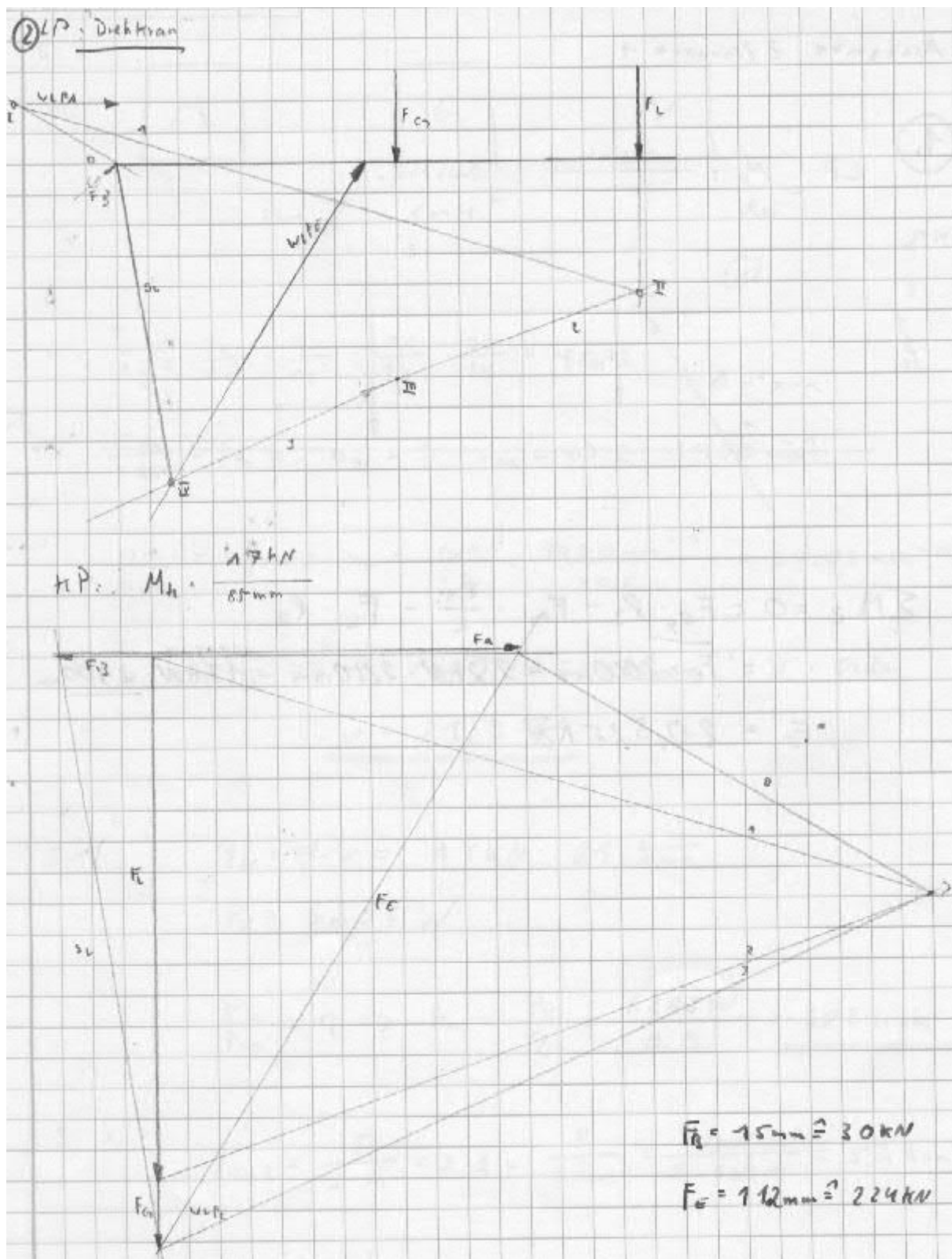
Im Festlager anfangen

Begründung: Wer nicht weiß, wie das Verfahren abläuft, vorerst nicht weiterlesen, sondern erst das Verfahren reinziehen.



5.3.11 Typische Fehler

Bild unten Drehkran freigemacht, aber dann fehlt F_D . F_B und F_E wären innere Kräfte.



Warum muss man sich klar machen, welches Bauteil man freischneidet ?



Beispiel Abi 2002 (HP01/02-2 Drehkran) Aufgabe 1

1. LP Laufschiene + Laufkatze $M_L = \frac{4500 \text{ mm}}{90 \text{ mm}}$

$$\tan \alpha = \frac{l_5 - l_6}{l_3} = \frac{3500 \text{ mm} - 2000 \text{ mm}}{2000 \text{ mm}} = 1,65 \Rightarrow \alpha = 58,78^\circ$$

$$\sum \overset{\curvearrowright}{M}_B = 0 = F_{Ey} \cdot l_3 + F_{Ex} \cdot (l_5 - l_6) - F_G \cdot \frac{l_1}{2} - F_L \cdot l_2$$

$$\Rightarrow F_E \cdot \sin(58,78^\circ) \cdot 2000 \text{ mm} + F_E \cdot \cos(58,78^\circ) \cdot 3500 \text{ mm} - 2,2 \text{ kN} \cdot 2250 \text{ mm} - 17 \text{ kN} \cdot 4200 \text{ mm}$$

$$F_{Ex} = F_E \cdot \cos(\alpha) \quad ; \quad F_{Ey} = F_E \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \underline{F_E = 22,32 \text{ kN}}$$

Der Schüler hat die Laufschiene freigeschnitten und die Gleichung angesetzt.

Man könnte auch die Laufschiene mit der Strebe freischneiden. Dort hat Komponente FEX den Hebelarm (l5-l6), dafür entfällt Komponente FEY, weil der Hebelarm 0 ist. Bild beider Möglichkeiten des Freimachens, Gleichungen und identische Lösung. Bild der Schülerlösung danach.

5.4 Geeignetes Bauteil auswählen

Beispiele: HP01/02 Drehkran Aufgabe 4: Man kann die Drehsäule freischneiden, muss aber dann die Kräfte FBx und Fex ermitteln. Da FB in einer vorherigen Aufgabe ermittelt wurde, sind viele Schüler auf diese Lösung fixiert. Einfacher ist es, die Drehsäule mit der Laufschiene, Strebe und Laufkatze freizumachen (nur bekannte Kräfte, keine Winkelfunktionen).

Beispiel Hebebühne

Kräfte und Wirklinien finden

Wie viele Kräfte muss man finden

Notwendigkeit: Wenn man beim Freimachen Fehler macht, kann man viele Punkte verlieren, weil man entweder gar keinen Lösungsansatz findet (bzw. finden kann), oder sich die Lösung wegen „übersehener“ Kräfte so vereinfacht, dass man trotz anschließend perfekter Lösung keine Punkte bekommen kann.

Die schlimmste Variante ist aber, wenn man sich durch fehlerhaftes Freimachen die Lösung unmöglich macht, dann viel Zeit in die Lösung investiert und keine Punkte erhält.

Es ist deshalb wichtig zu wissen, ab wann die Aufgabe lösbar wird

Regeln:

Begründung: Wenn alle Kräfte durch einen Punkt wirken (zentrales Kräftesystem) stehen 2 Gleichungen zur Verfügung: Summe aller Kräfte in x-Richtung ist Null und y-Richtung. Da man mit 2 Gleichung nur 2 Unbekannte lösen kann, darf man im zentralen Kräftesystem nicht mehr als 2 unbekannte Größen haben. Beachte: Eine Kraft hat schon zwei unbekannte



- Anlegetechnik: nicht verrutschungssicher (?)